

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR Fábio Nonato de Paula

..... E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 26 / 06 / 2009

Katia Lucchesi Cavalcanti  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

# **Modelo Dinâmico para o Contato em Mancais de Elementos Rolantes Sujeito à Lubrificação Elastohidrodinâmica**

Autor: **Fábio Nonato de Paula**

Orientador: Katia Lucchesi Cavalcanti

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETOS MECÂNICOS**

# **Modelo Dinâmico para o Contato em Mancais de Elementos Rolantes Sujeito à Lubrificação Elastohidrodinâmica**

Autor: Fábio Nonato de Paula

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânicas dos Sólidos e Projetos Mecânicos

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009  
S.P . – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

N73m                      Nonato de Paula, Fábio  
                                Modelo dinâmico para o contato em mancais de  
                                elementos rolantes sujeito à lubrificação  
                                elastohidrodinâmica / Fábio Nonato de Paula. --  
                                Campinas, SP: [s.n.], 2009.

                                Orientador: Katia Lucchesi Cavalca .  
                                Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
                                Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

                                1. Tribologia. 2. Mecânica do contato. 3. Mancais.  
                                4. Lubrificação. I. Cavalca, Katia Lucchesi. II.  
                                Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
                                Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Dynamic model for the contact in rolling element bearings  
under elastohydrodynamic lubrication

Palavras-chave em Inglês: Tribology, Contact mechanics, Bearings,  
Lubrication

Área de concentração: Mecânica do Contínuo, Elementos de Máquinas

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Robson Pederiva, Vicente Lopes Jr.

Data da defesa: 26/06/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETOS MECÂNICOS**

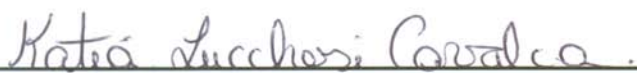
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO**


**Modelo Dinâmico para o Contato em Mancais  
de Elementos Rolantes Sujeito à Lubrificação  
Elastohidrodinâmica**

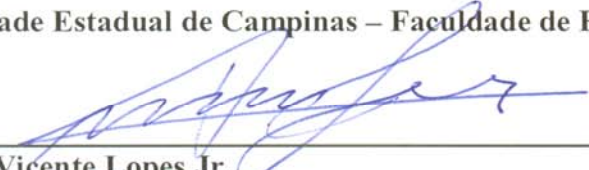
Autor: Fábio Nonato de Paula

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca, Presidente  
Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Robson Pederiva  
Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Vicente Lopes Jr.  
Universidade Estadual de Paulista – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Campinas, 26 de Junho de 2009

**Dedicatória:**

Dedico este trabalho aos meus pais, Almir e Iraci.

## **Agradecimentos:**

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por iluminar-me durante o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço a meu pai, por me introduzir ao mundo da engenharia, a minha mãe, pelo apoio incondicional, a minha irmã, por me alegrar sempre que precisei e a minha namorada, que esteve ao meu lado sempre. Agradeço a todos eles pela energia que me deram pra finalizar meu trabalho e sempre acreditarem em mim.

Agradeço também os amigos do laboratório, que direta e indiretamente ajudaram no trabalho. Sou profundamente grato a minha orientadora, por me agraciar com a oportunidade de desenvolver este projeto sob sua orientação e pelo suporte sempre presente.

*“Quem alcança seu ideal, vai além dele.”*  
*F. Nietzsche*

## **Resumo**

Nonato de Paula, Fábio; *Modelo Dinâmico para o Contato em Mancais de Elementos Rolantes sujeito à Lubrificação Elastohidrodinâmica*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009. 113p., Dissertação (Mestrado).

Com a necessidade da diminuição do tempo de projeto, a utilização de modelos computacionais para simulação de componentes mecânicos se torna rota obrigatória para se evitar excessivos testes físicos. Com base nesta premissa, se torna necessário estudar a dinâmica de componentes anteriormente considerados rígidos, como mancais de elementos rolantes, e assim conhecer sua influência sobre o sistema completo. Assim, utilizando um modelo por diferenças finitas em múltiplos níveis, foi avaliada a condição de lubrificação no contato em rolamentos sujeitos a lubrificação Elastohidrodinâmica (EHD) transiente. Desta forma foi possível caracterizar dinamicamente o contato, aproximando o filme de óleo a um conjunto de mola e amortecedor não lineares. Portanto introduz-se um elo flexível ao mancal, possibilitando a sua análise dinâmica como parte do sistema.

*Palavras Chaves:*

Tribologia, Mecânica do Contato, Mancais, Lubrificação



## ***Abstract***

Nonato de Paula, Fábio; *Dynamic Model for the Contact in Rolling Element Bearings under Elastohydrodynamic Lubrication*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009. 113p., Dissertação (Mestrado).

With the need of time reduction on mechanical projects, the use of computational models for the analysis of mechanical components becomes mandatory in order to avoid excessive physical tests. Based on this assumption, is necessary to study the dynamic of previously assumed rigid components, as the rolling elements bearings, and thus knowing its influence on the complete system. Utilizing a multi-level finite difference method, the lubrication condition on the contact in bearings under Elastohydrodynamic (EHD) transient lubrication was evaluated. Therefore the dynamic characterization of the contact was possible, adjusting the oil film to a nonlinear spring-damper set. Hence a flexible joint is introduced in the bearing, making it possible its dynamic analyses as part of the system.

### *Keywords:*

Tribology, Contact mechanics, Bearings, Lubrication

## ***Índice***

<b>Lista de Figuras.....</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas.....</b>	<b>xiv</b>
<b>Nomenclatura.....</b>	<b>xv</b>
<b>Capítulo 1 – Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 2 – Revisão da Literatura.....</b>	<b>6</b>
<b>Capítulo 3 – Desenvolvimento Teórico.....</b>	<b>16</b>
Deformação Elástica e Balanço de Forças.....	16
Lubrificantes.....	23
Equacionamento de Reynolds.....	25
Equação de Movimento.....	28
<b>Capítulo 4 – Equacionamento Numérico.....</b>	<b>30</b>
Adimensionalização do Equacionamento.....	31
Modelo Numérico Multi-Níveis.....	36
MLMI – Integração Multi-Níveis.....	46
Discretização do Modelo Elastohidrodinâmico – EHD.....	51
Relaxação do Equacionamento Discreto.....	56
<b>Capítulo 5 – Resultados e Discussões.....</b>	<b>64</b>
Contato Elíptico.....	64

Carregamento Harmônico.....	76
Vibração Livre.....	82
<b>Capítulo 6 – Conclusões e Sugestões para próximos Trabalhos.....</b>	<b>100</b>
<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>105</b>
<b>Apêndice A - Distribuição de Carregamento em Mancais Radiais de Esfera.....</b>	<b>110</b>

## ***Lista de Figuras***

1.1 – Exemplo de mancal de elemento rolante de esferas radial	2
1.2 – Áreas de contato em um mancal de elementos rolantes tipo esferas	3
1.3 – Contato elemento-pista e simplificação para o modelo dinâmico massa-mola-amortecedor ;	4
2.1 – Perfil de pressão e espessura para o contato com lubrificação EHD	11
3.1 - Geometria de dois corpos em contato;	18
3.2 – Representação da elipse de contato;	19
3.3 – Solução de Weierstrasse para a equação de movimento no contato seco, condições iniciais de posição 1.1, 1.5 e 1.84, Wijnant (1998);	22
3.4 - Densidade relativa ( $r / r_0$ ) obtida para vários lubrificantes utilizando a relação proposta por Dowson e Higginson (Larsson, 2000)	23
3.5 - Viscosidade relativa ( $h / h_0$ ) obtida para vários lubrificantes utilizando a relação exponencial de Roelands (Larsson, 2000);	25
4.1 - Hierarquia de malhas; malha fina ( $h_x, h_y$ ) nível $k$ , malha grossa ( $H_x, H_y$ ) nível $k-1$ ;	37
4.2 - Função periódica de baixa frequência (a); alta frequência (b) ; Combinação linear das funções (c), como na função erro (Goodyear, 2001);	39
4.3 - Esquema Ciclo em V;	41
4.4 – Esquema Ciclo em W;	42
4.5 - Esquema Ciclo FMG;	42
4.6- Descrição esquemática do operador de expansão (Goodyer,2001);	45
4.7 - Descrição esquemática do operador de restrição (Goodyer,2001);	46
4.8 - Estrutura de discretização dos pontos da malha;	52
5.1 –Perfis de pressão e espessura de filme para caso de baixa carga em malha de 1024x1024 pontos, a) com fronteira de relaxação variável e b) fronteira fixa, (Nonato e Cavalca, 2008);	65
5.2 – Gráficos de contorno espessura e distribuição pressão para o caso de Baixa Carga com elipsidades a) 1,0 b) 0,5 e c) 0,1	67

5.3 – Gráficos de contorno espessura e distribuição pressão para o caso de Média Carga com elipsidades a) 1,0 b) 0,5 e c) 0,1	68
5.4 – Gráficos de contorno espessura e distribuição pressão para o caso de Alta Carga com elipsidades a) 1,0 b) 0,5 e c) 0,1	69
5.5 – a) Contornos de Espessura, b) Perfil de pressão e espessura na linha central do contato e c) Distribuição de pressão no domínio para contato Elemento-Pista Interna	74
5.6 – a) Contornos de Espessura, b) Perfil de pressão e espessura na linha central do contato e c) Distribuição de pressão no domínio para contato Elemento-Pista Externa	75
5.7 – Resposta harmônica do contato para duas frequências de excitação;	77
5.8 – Representação das ondulações na espessura de filme e pressão para instantes de tempo $T=0,0$ a $T=1,25$ , ( $M=200$ , $L=10$ , $k=0,5$ e $\Omega_e = 2p$ );	79
5.9 – Comportamento da espessura mínima, $H_m$ , e espessura central, $H_c$ , do filme para o caso $M=200$ , $L=10$ , $k=0,5$ e $\Omega_e = 2p$ ;	80
5.10 – Ajuste da aproximação dos corpos, $H_0$ , em função de $M$ e $L$ ;	81
5.11 – Resposta transiente, a) deslocamento $H_0$ , b) espessura centra $H_c$ e c) mínima $H_m$ ;	84
5.12 – Contornos de espessura para o caso $M=200$ , $L=10$ e $\Omega_n = 10,26$ ;	85
5.13 – Resposta transiente a três frequências adimensionais $\Omega_n = 2,56$ , $5,13$ e $10,26$ ;	85
5.14 – Resposta transiente pra três desvios do equilíbrio estático, 10%, 20%, 40%;	86
5.15 – Resposta transiente pra $M=200$ , $L=10$ , $k=1,0$ e $\Omega_n = 2,5$ , a) segundo Wijnant e Wensing (1999), b) simulado	87
5.16 – Ajuste linear da força dinâmica no contato para $M=100$ , $L=15$ , $k=1,0$ e $\Omega_n = 2,65$ ;	89
5.17 – Ajuste linear da posição para o contato: $M=100$ , $L=15$ , $k=1,0$ e $\Omega_n = 2,65$ ;	91
5.18 – Ajuste linear da posição para o contato: $M=100$ , $L=15$ , $k=1,0$ a) $\Omega_n = 5,13$ e b) $\Omega_n = 10,26$ ;	92
5.19 – Ajuste não linear a) da força dinâmica no contato e b) da aceleração do sistema, de acordo com Tabela 5.10, caso $\Omega_n = 5,13$ ;	95

5.20 –Ajuste não linear do deslocamento do sistema, de acordo com Tabela 5.10, caso $\Omega_n = 2,65$ ;	96
5.21 –Ajuste não linear a) da força dinâmica no contato e b) da aceleração do sistema para o contato Elemento-Pista Interna no Mancal FAG6005, $M = 9912$ , $L = 11,75$ , $k = 0,1092$ ;	97
5.22 –Ajuste não linear a) da força dinâmica no contato e b) da aceleração do sistema para o contato Elemento-Pista Externa no Mancal FAG6005, $M = 13373$ , $L = 8,38$ , $k = 0,1357$ ;	97
5.23 –Detalhe do ajuste não linear a) da força dinâmica no contato e b) da posição do sistema para o contato Elemento-Pista Interna no Mancal FAG6005;	98
A.1 – Condição de deformação em um mancal radial de esferas;	112

## ***Lista de tabelas***

4.1 – Parâmetros de caracterização do contato EHD;	31
4.2 – Resíduo numérico e tempo computacional para avaliação da integral de deformação no contato seco elíptico;	33
4.3 - Diferentes regimes da Lubrificação EHD (Venner, 1999)	36
5.1 – Parâmetros para os casos de alta, média e baixa carga elípticos;	66
5.2 – Valores de aproximação dos corpos em carregamento estático para os casos de Baixa, Média e Alta carga;	70
5.3 – Valores de aproximação dos corpos em carregamento estático para os casos de Baixa, Média e Alta carga;	71
5.4 – Teste de convergência de segunda ordem para o caso de Baixa Carga $k = 1,0$ ;	72
5.5 – Dados para avaliação do contato EHD do mancal FAG 6005;	72
5.6 – Distribuição de carregamento e parâmetros EHD em um mancal FAG 6005;	73
5.7 – Distribuição de carregamento e parâmetros EHD em um mancal FAG 6005;	73
5.8 – Dados do ajuste Linear para o contato $M = 100$ , $L = 15$ , $k = 1,0$ ;	91
5.9 –Análise de sensibilidade do modelo de ajuste não linear;	93
5.10 – Dados do ajuste Não Linear para o contato $M = 100$ , $L = 15$ , $k = 1,0$ ;	94
5.11 – Dados do ajuste Não Linear para o contato três casos de desvio da condição estática como condição inicial;	94
5.12 – Dados do ajuste Não Linear para o contato Elemento-Pista Interna no Mancal FAG6005, $M = 9912$ , $L = 11,75$ , $k = 0,1092$ ;	97
5.13 – Dados do ajuste Não Linear para o contato Elemento-Pista Externa no Mancal FAG6005, $M = 13373$ , $L = 8,38$ , $k = 0,1357$ ;	98

## **Nomenclatura**

$a$	- Semi-eixo menor da elipse de contato	$[m]$
$A_f$	- Amplitude de excitação harmônica	
$A^h$	- Matriz do sistema linear de relaxação	
$b$	- Semi-eixo maior da elipse de contato	$[m]$
$B_4$	- Coeficiente dinâmico misto	
$c$	- Aproximação dos corpos em contato seco	$[m]$
$D$	- Diâmetro do elemento rolante	$[m]$
$D_i$	- Coeficientes de amortecimento não linear, $i = 1, \dots, 4$	
$D_m$	- Diâmetro primitivo do mancal de elementos rolantes	$[m]$
$E$	- Módulo de Elasticidade	$[N/m^2]$
$E'$	- Módulo de Elasticidade Reduzido	$[m^2/N]$
$e^h$	- Erro da Solução do Sistema Linear	
$f$	- Força no Contato	$[N]$
$f_d$	- Força Dinâmica no Contato	
$f_m$	- Carga no Mancal	$[N]$
$f^h$	- Lado Direito do Sistema Linear	
$F_{din}$	- Força Dinâmica da Equação de Movimento	
$G$	- Parâmetro Adimensional de Material segundo Dowson	
$h(x, y)$	- Espessura de Filme	$[m]$
$H(X, Y)$	- Espessura Adimensional de Filme	
$h_c$	- Espessura Central do Filme	$[m]$
$h_{min}$	- Espessura Mínima do Filme	$[m]$



$h_0$	- Aproximação entre os Corpos	$[m]$
$H_0$	- Aproximação Adimensional entre os Corpos	
$H_0^*$	- Valor ajustado da Aproximação Adimensional entre os Corpos	
$h_T$	- Passo Temporal	
$h_X$	- Tamanho da malha na direção X	
$h_Y$	- Tamanho da malha na direção Y	
$I_H^h$	- Operador de Expansão	
$I_h^H$	- Operador de Restrição	
$I_h^H$	- Operador de Restrição	
$K(X, Y)$	- Função Núcleo da Integral de Deformação	
$K_i$	- Rigidez Adimensional da $i$ -ésima Ordem, $i = 1$ até 3	
$L$	- Parâmetro Adimensional de Moes de Lubrificante	
$L^h$	- Operador Diferencial da Equação de Reynolds	
$m$	- Massa do Elemento Rolante	$[g]$
$M$	- Parâmetro Adimensional de Moes de Carga	
$n_i$	- Rotação do Anel Interno	$[RPM]$
$n_o$	- Rotação do Anel Externo	$[RPM]$
$n_x$	- Número de Pontos em $x$	
$n_y$	- Número de Pontos em $y$	
$p$	- Pressão	$[Pa]$
$p_0$	- Pressão Atmosférica de Referência	$[Pa]$
$p_h$	- Pressão de Hertz no Contato	$[Pa]$
$P$	- Pressão Adimensional	
$R$	- Somatória das Curvaturas	$[1/m]$
$R_X$	- Somatória das Curvaturas na Direção X	$[1/m]$
$R_Y$	- Somatória das Curvaturas na Direção Y	$[1/m]$
$r^h$	- Resíduo Numérico do Sistema	

$S$	- Grupo Adimensional Geométrico	
$t$	- Tempo	$[s]$
$T$	- Tempo Adimensionalizado	
$U$	- Parâmetro Adimensional de Velocidade segundo Dowson	
$u$	- Variável Principal do Sistema Mecânico, Posição	
$\dot{u}$	- Velocidade do Sistema Mecânico	
$\ddot{u}$	- Aceleração do Sistema Mecânico	
$u^h$	- Vetor Solução do Sistema Linear	
$u_m$	- Somatória das Velocidades	$[m/s]$
$w(x, y)$	- Deformação Pontual devido a Distribuição de Pressão	$[m]$
$W$	- Parâmetro Adimensional de Carga segundo Dowson	
$x$	- Coordenada Longitudinal ao Contato	$[m]$
$X$	- Coordenada Longitudinal Adimensionalizada	
$y$	- Coordenada Transversal ao Contato	$[m]$
$Y$	- Coordenada Transversal Adimensionalizada	
$Z_e$	- Número de Elementos do Mancal	
$a$	- Índice Viscosidade-Pressão	$[m^2/N]$
$d^h$	- Vetor Solução do Sistema Linear de Relaxação	
$h$	- Viscosidade	$[N.s/m^2]$
$h_0$	- Viscosidade a Pressão Ambiente	$[N.s/m^2]$
$\bar{h}$	- Viscosidade Relativa	
$k$	- Elipsidade do Contato	
$\bar{l}$	- Parâmetro Adimensional da Equação de Reynolds	
$n$	- Coeficiente de Poisson	
$r$	- Densidade	$[g/m^3]$
$\bar{r}$	- Densidade Relativa	
$\Omega_n$	- Frequência Adimensional	
$\Omega_e$	- Frequência Adimensional de Excitação	

x	- Grupo Adimensional da Equação de Reynolds
z	- Integral Elíptica de Segunda Ordem
y	- Integral Elíptica de Primeira Ordem

### ***Siglas***

EHD	- Lubrificação Elastohidrodinâmica
FMG	- Ciclo Multi-Níveis Completo, <i>Full Multi-Grid</i>
FAS	- Esquema de Aproximação Completo, Full Approximation Scheme
ODE45	- Integrador tipo Runge-Kutta de 4 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> ordens
ODE23	- Integrador tipo Runge-Kutta de 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> ordens

# **Capítulo 1**

## **Introdução**

A diminuição de tempo entre atualizações e desenvolvimento de novos produtos trouxe novos desafios às equipes de projeto. Hoje, a redução de tempo de projeto de sistemas mecânicos tornou-se fator crucial de sucesso em muitas aplicações. Pode-se dizer que a pressão do mercado sobre tecnologias, tanto de produção quanto de desenvolvimento, se encontra em um patamar nunca atingido.

Muitas são as soluções viáveis para redução do tempo de projeto, porém com os avanços computacionais, parte dos esforços experimentais pode ser substituída por simulações computacionais, evitando gastos desnecessários na produção e reduzindo tempo de desenvolvimento de protótipos e amostras.

Porém, muitos dos sistemas mecânicos ainda apresentam elementos de difícil simulação numérica, que por fim exigem vários testes práticos antes da conclusão do produto. Este é o caso dos mancais de elementos rolantes. Muitas vezes seu comportamento dinâmico é negligenciado, introduzindo vínculos rígidos ao sistema. Contudo, quando se espera um comportamento otimizado, principalmente quanto a vibrações e ruídos, poucas são as maneiras de representar tais mancais, senão por meio de experimentos.

Os mancais de elementos rolantes, como o da Figura 1.1, normalmente são os elementos de ligação entre eixos e carcaças em várias aplicações mecânicas, tais como automotiva ou industrial, desenhados para suportar carga e velocidades rotacionais dos componentes. Neste arranjo os mancais de rolamento se tornam os transmissores de vibrações entre as partes.

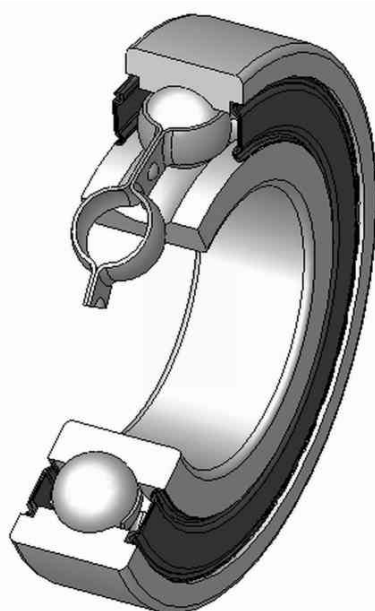


Figura 1.1 – Exemplo de mancal de elemento rolante radial de esferas;

Alguns exemplos de aplicações automotivas são os trens de forças, que devido aos grandes esforços gerados em seus subsistemas, caixa de marchas e diferenciais, entre outros, necessitam de mancais de elementos rolantes com maior capacidade de carga para suporte dos eixos. Em aplicações menos intensas, como motores elétricos, são utilizados pequenos e médios mancais de rolamento, normalmente aplicados em altas rotações. Os quesitos vibrações e ruídos são de suma importância, principalmente nestes casos, onde o próprio motor se torna uma fonte de vibração externa.

Desta forma, a qualidade de tais mancais é medida, atualmente, quanto a seu desempenho vibracional, não mais somente por sua vida nominal e capacidade de carga. Tais aspectos são normalmente regidos por regulamentações governamentais bastante estritas e, principalmente, pela demanda dos consumidores, como apontado em Wensing(1998) e Wijnant (1999).

Entender a dinâmica dos mancais de elementos rolantes depende, então, do entendimento dos elementos de ligação dentro do próprio mancal. Nos pontos de contato entre pista e elementos rolantes estarão presentes as forças de sustentação provenientes do sistema mecânico.

Os primeiros esforços para a modelagem do contato mecânico de corpos geometricamente não conforme, como mostrado na Figura 1.2 para mancais de esferas, ocorreram na segunda metade do século XIX. Utilizando um modelo tensorial, Hertz em 1881 publicou seus estudos que, até hoje, servem como base para o modelo de contato seco, cujos resultados carregam seu nome. A abordagem deste problema, apesar de não direta, é bem simples, principalmente com o poder computacional moderno. Com estas equações, tornou-se possível o estudo das deformações envolvidas no contato e sua distribuição de pressão, trazendo uma nova visão sobre contatos entre elementos rolantes de um mancal ou dentes de engrenagem.

Deste modo, o comportamento dinâmico do contato é de suma importância no estudo da dinâmica do sistema completo, o mancal de elementos rolantes. Portanto, para introduzir os efeitos do contato, estes devem ser modelados como um sistema dinâmico, introduzindo uma ligação flexível ao mancal.

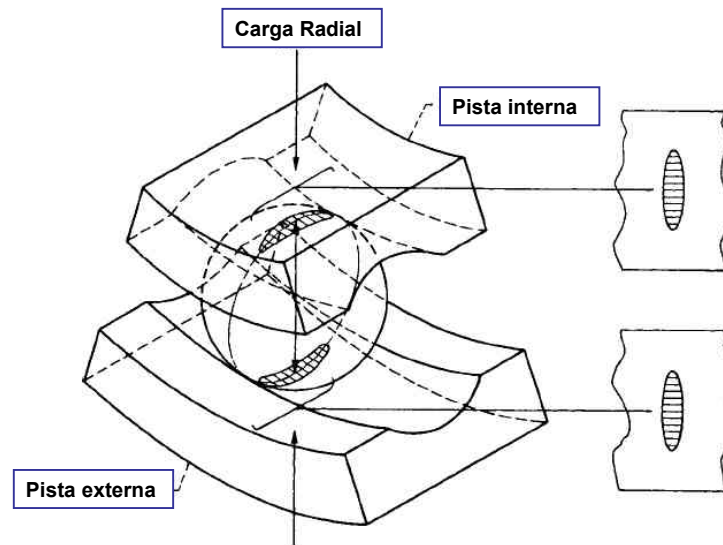


Figura 1.2 – Áreas de contato em um mancal de elementos rolantes radial de esferas;

Desta forma, o filme de óleo existente nestas interfaces, provido, principalmente, para aumentar a vida do mancal, tem papel primordial nas interações dinâmicas. Parte da energia transmitida será absorvida por este filme, assim como pelas deformações elásticas presentes no contato.

Devido, principalmente, a condição de deformação causada pelas altas cargas nas áreas de contato de Hertz, torna-se possível a formação do filme lubrificante. As superfícies deformadas, que formam as áreas de contato, provêem um espaçamento entre os corpos para que um filme de lubrificante em movimento se forme. Desta maneira, pela incorporação da parcela elástica à dinâmica do filme, a lubrificação presente nesta aplicação é conhecida como Lubrificação Elastohidrodinâmica, EHD.

O filme de óleo existente nestas interfaces, provido, principalmente, para aumentar a vida do mancal, tem papel primordial nas interações dinâmicas. Parte da energia transmitida será absorvida por este filme, assim como pelas deformações elásticas presentes no contato. Portanto, para compreender a dinâmica do contato, suas características devem ser simuladas, tanto rigidez como amortecimento, levando em conta um modelo EHD para a lubrificação.

Conseqüentemente, é necessária uma abordagem transiente completa do contato lubrificado, para que se possa obter uma aproximação para os coeficientes dinâmicos. Cada elemento do mancal terá, então, uma ligação flexível com a pista interna e uma com a pista externa, provenientes do modelo de lubrificação EHD. Este é o primeiro passo para a modelagem completa do mancal. A Figura 1.3 mostra, esquematicamente, esta modelagem.

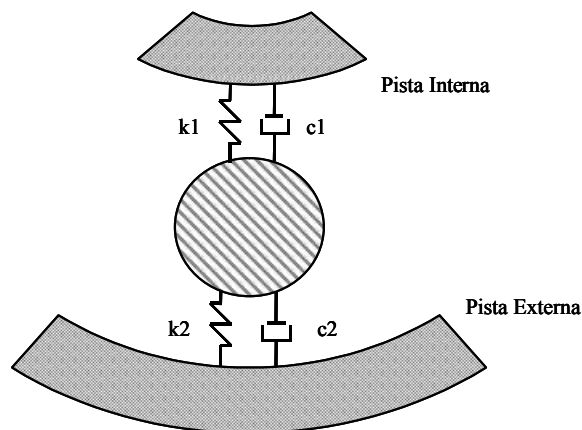


Figura 1.3 – Simplificação do contato, entre pistas e elemento rolante, para o modelo dinâmico massa-mola-amortecedor;

Com o sistema agora modelado como dois anéis concêntricos, ligados por massas suspensas pelos elementos dinâmicos providos pelo filme, o mancal não mais é um elemento rígido do sistema. Desta forma, os mancais passam a não ser mais vínculos rígidos e, sim, elementos flexíveis da estrutura, e sua influência sobre a dinâmica não é mais desprezada.



## **Capítulo 2**

### **Revisão Bibliográfica**

Em 1886, o aumento de pressão presente em mancais hidrodinâmicos, observado experimentalmente por Tower, foi descrito por Reynolds nas equações que constituem a base para a teoria de lubrificação hidrodinâmica atual. Complementando estes dois trabalhos, em 1893, Barus publicou um estudo sobre o efeito da pressão sobre a viscosidade e, destes primeiros resultados, originou-se o que se chama hoje teoria da lubrificação Elastohidrodinâmica, ou EHD.

Os primeiros resultados teóricos aplicados da teoria de lubrificação Elastohidrodinâmica remetem aos anos 50 quando, pela primeira vez, foi analisada a lubrificação sob condições especiais em elementos de máquinas, com níveis de solicitação acima da média, e geometrias não conformes, como presente em mancais de elementos rolantes e engrenagens.

Nestes casos, a teoria hidrodinâmica, até então tida como válida para todos os casos de lubrificação, não conseguia prever um filme de óleo plausível, devido, principalmente, aos grandes esforços envolvidos e a geometria pouco conforme, que não provê uma área de contato suficientemente extensa para formação de uma camada de lubrificante. Martin (1916) já havia descrito que a discrepância entre as espessuras de filme de óleo nestas aplicações, quando avaliadas pela teoria Hidrodinâmica, e as medidas experimentais, jogava por terra qualquer aplicação prática dos modelos.

Durante a década de 40, Lundberg e Palmgren publicaram estudos sobre vida de mancais de rolamento, até hoje utilizados como base no dimensionamento destes componentes. Neste caso, os efeitos do lubrificante são contabilizados como um fator multiplicador da vida nominal,

podendo esta ser aumentada ou diminuída. Estes efeitos provêm nitidamente da inclusão de um filme de óleo capaz de separar as superfícies metálicas, evitando o contato metal-metal.

Segundo Dowson e Higginson (1966) para os casos de mancais de elementos rolantes, a estimação do filme de óleo hidrodinâmico previa uma espessura de  $0,011\text{ mm}$ , quando, na época, a rugosidade de componentes de mancais de elementos rolantes normalmente chegava a  $0,25\text{ mm}$ . Sendo assim, não era possível garantir que um filme contínuo de óleo se formaria no contato para suportar as forças e, conseqüentemente, o fato de contatos desse tipo terem sua vida em fadiga aumentada com a presença de óleo lubrificante não era explicado.

Portanto, outros efeitos, principalmente de variáveis do contato alheias à dinâmica dos fluídos, deveriam ser estudados de forma a ajustar os modelos teóricos para obtenção do filme de óleo, assim como o comportamento do próprio lubrificante, quando sob altas pressões.

A teoria de Lubrificação Elastohidrodinâmica (EHD) propõe-se a estudar a influência da elasticidade dos corpos, quando em contato, sobre o filme de óleo existente entre os mesmos. Grande parte da análise inicia-se da própria teoria de contato de Hertz. O modelo tensorial de Hertz prevê deformações dentro do limite elástico do material de forma a distribuir a pressão no contato. Desta forma, quando relaxada a pressão no contato, os corpos devem retornar a sua forma original.

Como descrito em Changsen (1991), a Teoria de Contato de Hertz prevê, então, o surgimento de uma área de contato. Esta área é aproximada a uma elipse e, sobre a mesma, a força de contato se distribui de forma parabolóide. Devido às características do contato, a área formada apresenta dimensões muito inferiores em relação a curvatura dos corpos, devido ao carregamento, porém sua forma, ou seja, razão da elipse, é função apenas da geometria. Tais modelos são de fácil tratamento numérico, devido a sua característica iterativa, e de simples abordagem, conforme descrito por muitos na literatura [Harris (1991), Eschman (1985) e Wijnat (1998), entre outros].

A deformação elástica dos corpos influencia diretamente as condições de lubrificação dos mesmos, quando em contato. Ao se deformarem, devido à pressão de contato, ocorre uma maior coesão geométrica entre os corpos e, intuitivamente, conclui-se que parte da espessura do filme deve-se a nova condição de distanciamento entre os corpos, devido à deformação. Para o contato seco, tal superfície de contato consiste em um plano, como previsto em Venner (1991), e confirmado em Nonato (2008).

Em uma análise puramente hidrodinâmica, pelo fato dos corpos não possuírem uma coesão geométrica expressiva, pode ocorrer muita imprecisão em relação às aproximações geométricas da curvatura do filme de óleo. Tal influência é explícita quando se compara um mancal hidrodinâmico simples a um rolamento de esferas. No primeiro caso, o espaçamento entre os corpos cilíndricos, preenchido por óleo, pode ser facilmente aproximado por planos próximos. Já para o mancal de esferas, o filme de óleo se forma entre o contato de uma esfera sobre a pista de um rolamento, sendo que estes dois corpos possuem geometrias muito pouco conformes.

Aliado aos efeitos geométricos e de deformação, o próprio filme de óleo se sujeita a níveis maiores de pressão, e suas características básicas, viscosidade e densidade, não se comportam mais como em condições ambientes, não permitindo serem assumidos constantes por todo o contato.

Todos estes efeitos devem, então, ser considerados na avaliação do comportamento dinâmico do filme. Assim, como para a teoria hidrodinâmica, as características dinâmicas do filme de óleo são modeladas pela equação de Reynolds, que alia o comportamento cinemático do filme às equações de continuidade.

Para efeito de comparação, podem-se citar os pontos que diferem a teoria de lubrificação hidrodinâmica da EHD:

1. Na definição do filme de óleo, a deformação dos corpos não é desconsiderada;
2. A viscosidade não é mais independente da pressão, assim como a densidade;

3. A lubrificação hidrodinâmica se caracteriza em superfícies com alto grau de conformidade geométrica, mas a EHD normalmente ocorre em corpos de geometrias não conforme.

A principal característica da aplicação da lubrificação EHD é, por fim, gerar uma espessura mínima de filme sobre tais condições de alta pressão e baixa conformidade geométrica. A atual situação tecnológica e econômica de busca de aumento de eficiência e redução de custos resulta em uma diminuição da camada de filme lubrificante frente à rugosidade das superfícies. Nestes casos, pode-se citar o aumento de carga, aumento da temperatura de operação, custos elevados devido à diminuição das margens de segurança sobre peso, tamanho e consumo de energia pela viscosidade dos lubrificantes em operação, como fatores cruciais de projeto.

Portanto, as características de um contato lubrificado são dados de suma importância quando a máxima eficiência e o mínimo custo estão em pauta em qualquer projeto de elementos mecânicos. Neste ponto, a teoria de lubrificação Elastohidrodinâmica resulta em uma modelagem mais precisa que a teoria Hidrodinâmica, para os casos citados.

As primeiras soluções para o caso se basearam, principalmente, em análises algébricas para os casos mais simples, unidimensionais, de lubrificação em contatos lineares, apresentadas em Dowson e Higginson (1966), onde se esboçavam os primeiros caminhos para a solução numérica dos casos bidimensionais.

Vários resultados anteriores, mesmo sem nenhuma solução completa para o problema, trouxeram as principais variáveis do equacionamento à tona. Os efeitos elásticos de deformação foram primeiramente estudados por Peppeler (1936), onde a pressão máxima no filme de óleo em um contato de dentes de engrenagem foi estudada, para um fluido isoviscoso, sendo esta superior à pressão de contato de Hertz, resultado até então desconhecido.

Block (1950) propôs que não somente os efeitos elásticos seriam a causa das diferenças encontradas em filmes de óleo medidos e calculados, propondo uma relação exponencial para a

viscosidade. Porém, nem todos os pontos do equacionamento eram satisfeitos e as principais condições de contorno ainda eram desconhecidas.

Alguns resultados muito satisfatórios, porém não para a resolução completa, já haviam sido apresentados por Grubin (1949) na Rússia. Seus estudos sobre a influência combinada da elasticidade e da viscosidade sobre o contato na região de entrada do filme foram muito úteis para os desenvolvimentos posteriores. Grubin assumiu que os corpos deformados teriam a forma do contato seco, determinando, desta forma, o comportamento da pressão sobre esta região e a separação necessária entre os corpos dentro da área de contato de Hertz. Sua principal contribuição foi a equação para a espessura do filme em contatos altamente carregados.

Durante toda a década de 50, grande esforço se deu entre os pesquisadores para obtenção de métodos de medição de filme de óleo sobre contatos altamente carregados, até então, utilizando experimentos de discos sobre superfície para determinar o comportamento aproximado de contatos em dentes e engrenagem e para testes de compatibilidade de materiais. Os primeiros bons resultados foram obtidos por Crook (1958) com a medida de filme de óleo em máquinas de discos por métodos de capacitância e fluxo de óleo.

Os resultados de Dowson e Higginson foram primeiramente apresentados em 1961, onde uma relação adimensional para a espessura mínima do filme de óleo em função da carga, da geometria e das velocidades, foi apresentada. A expressão proposta era:

$$\frac{h_{\min}}{R_x} = 2,65 \cdot U^{0,7} \cdot G^{0,54} W^{-0,13} \quad 2.1$$

Sendo que  $h_{\min}$  é a espessura mínima de filme,  $R_x$  um somatório das curvaturas dos corpos e  $U$ ,  $G$  e  $W$  são parâmetros adimensionais de velocidade, material e carregamento, como definidos em Dowson e Higgins(1966). A convergência entre os valores apresentados e os obtidos experimentalmente por Crook demonstrava que os modelos utilizados estavam se tornando mais precisos.

Este trabalho confirmou as principais características da lubrificação EHD: uma redução na espessura do filme na saída do contato da ordem de 30%, que para altas cargas apresenta distribuição de pressão próxima a de Hertz, porém com um pico de pressão que precede o ponto de diminuição da espessura, como apresentado na figura 2.1, onde  $U_1$  e  $U_2$  são as velocidades dos corpos em contato.

Porém, estes trabalhos ainda baseavam-se, principalmente, na análise de contatos lineares, mais ajustados a modelagem de dentes de engrenagem. Durante toda a década de 1960, vários estudos transcorreram sobre os efeitos da temperatura, do comportamento dos lubrificantes e dos efeitos de vazamento lateral, que em lubrificação hidrodinâmica comum causa uma perda na capacidade de carga do filme. Até que, em meados da década de 1970, as primeiras análises numéricas para o equacionamento bidimensional surgiram, principalmente, devido aos avanços na área computacional.

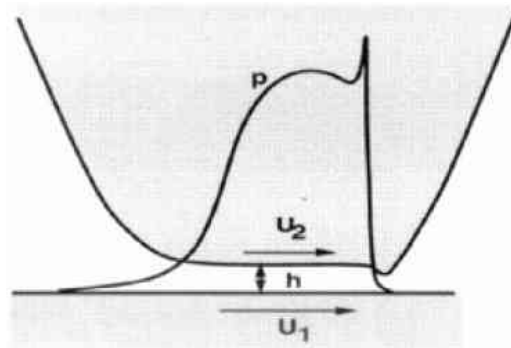


Figura 2.1 – Perfil de pressão  $p$  e espessura  $h$  para o contato com lubrificação EHD

Em 1970, Ranger *et al* publicou a primeira solução para contato pontual que, mais tarde, foi estendida para o contato elíptico por Dowson e Hamrock, para produzir uma aproximação para a espessura mínima de filme e espessura central,  $h_c$ , em termos dos parâmetros adimensionais mencionados, além da representação da elipsidade,  $k$ , (Spikes, 2006). As relações são:

$$\frac{h_{\min}}{R_x} = 3,63 \cdot U^{0,68} \cdot G^{0,49} W^{-0,073} \left( 1 - k^{-0,70} (R_y / R_x)^{0,64} \right) \quad 2.2$$

$$\frac{h_c}{R_x} = 2,69 \cdot U^{0,67} \cdot G^{0,53} W^{-0,067} \left( 1 - 0,61k^{-0,70(R_y/R_x)^{0,64}} \right) \quad 2.3$$

Hamrock (1975) publicou uma série de artigos sobre lubrificação elastohidrodinâmica em contatos pontuais, partindo de um primeiro desenvolvimento numérico para o problema completo, descrito posteriormente em sua tese de doutorado em 1976. Neste trabalho, o método de diferenças finitas foi utilizado para solucionar o sistema de equações que modelam as características da lubrificação EHD, tornando-se o principal método de resolução para tais problemas.

Durante a década de 70, as principais áreas de interesse sobre a lubrificação EHD eram a modelagem da espessura de filme, para contatos com insuficiência de lubrificante, e a influência da rugosidade das superfícies. Foi também classificada a lubrificação EHD, perante os quatro regimes de lubrificação, como piezoviscosa-elástica.

Desde então, as bases para o equacionamento EHD estavam solidamente implementadas, sendo que, parte dos esforços agora se concentrava em aumentar a eficiência numérica dos algoritmos de solução.

Em meados da década de 1980, novas técnicas numéricas surgiram para solução de equações diferenciais, sendo uma delas apresentada por Ludbrecht *et al* (1986) para lubrificação EHD em contatos lineares. Conhecida como método Multi-Grid, ou Multi-Níveis, de multiplicação de matrizes, foi proposta uma pressão reduzida quando derivando a equação de Reynolds, o que, porém, adicionou muita complexidade ao equacionamento.

Em 1991, Venner propôs uma alteração nos modelos de Ludbrecht, descartando a pressão reduzida e diminuindo drasticamente a complexidade do equacionamento Multi-Níveis, para a lubrificação EHD isotérmica. Com uma série de trabalhos sobre o tema, Venner ainda melhorou o método de relaxação proposto primeiramente por Hamrock (1975), aumentando incrivelmente a potencialidade do equacionamento.

Até este momento, os modelos de solução por iterações diretas sofriam ou pelo enorme tempo computacional para avaliar malhas suficientemente finas ou pela grande dependência das equações elásticas em toda área sujeita a pressão de contato, o que também prejudica o desempenho. Desta forma, como propôs Venner, trabalhando em várias malhas de diferentes discretizações, parte dos cálculos se dá em malhas grosseiras, acelerando a convergência, enquanto outra parte se dá em malhas mais refinadas, onde cada detalhe do filme pode ser observado sem perda de precisão.

Com tais avanços, as rotinas para solução de modelos EHD se tornaram mais palpáveis, em termos de tempo computacional. Este passo foi crucial para modelagem não estática do problema, contemplando novas abordagens, como a de distúrbios móveis no filme de óleo, garantindo a modelagem de descontinuidades dos corpos rolantes em Venner (1994), e fluxos não estáveis de óleo em Venner (1996).

Outras áreas de aplicação do modelo de lubrificação EHD também se beneficiam com o estudo da solução do problema. O contato EHD também pode ser estudado para casos de tração, como por exemplo, em transmissões automáticas tipo CVT com correia metálica, onde a tração é garantida pelo contato pino-polia. Neste caso, observa-se que altas velocidades de entrada, isto é, altas velocidades de movimento relativo entre os corpos, aliadas a elevados níveis de pressão, levam o filme de óleo a sofrer altas tensões de cisalhamento, comportando-se como visco-elástico. Desta forma, além de muito boa precisão no equacionamento, necessita-se modelar suficientemente a reologia do lubrificante (Spikes, 2006).

Até os tempos atuais, muito foi feito em relação às aplicações do equacionamento proposto por Venner para múltiplas variações do problema da lubrificação EHD. Wang, *et al*, (2000) publicou um artigo com simplificações no equacionamento Multi-Níveis que reduzem a complexidade numérica sem perder em precisão para o caso de contato linear.

As principais modelagens dos últimos anos, começo do século XXI, focaram-se em filmes finos, superfícies rugosas, com possíveis descontinuidades. Parte dos algoritmos de solução, propostos no final da década de 1990, tem sua aplicação garantida em sistemas transientes, como



para partida em sistemas lubrificados e movimentos sobre descontinuidades e asperezas. Tais situações necessitam algoritmos poderosos, para que, em conjunto com a solução acoplada do problema EHD, ocorra a solução, no domínio do tempo, das variáveis dinâmicas do equacionamento.

Muitos dos modelos transientes do problema vêm sendo aplicados em soluções onde a parcela dinâmica se posiciona como influência sobre a dinâmica do filme de óleo, descontinuidades móveis e ondulações, porém, como proposto em Wijnant *et al* (1999), a presença do filme de óleo pode influenciar a dinâmica do contato em elementos de máquinas. A aproximação dos corpos, como parte da espessura do filme, tem grande influência sobre a dinâmica vibracional do sistema.

Durante suas investigações para o problema transiente, Wijnant propõe uma equação de movimento que representa o contato esfera pista, que posteriormente também foi utilizada por Goodyear (2001), em seus estudos de otimização do algoritmo Multi-Níveis. Em sua tese, Goodyear define vários potenciais pontos de otimização para solução, incluindo transferências de resultados entre ciclos de malhas e, principalmente, na introdução da solução transiente por incremento de tempo variável. Porém, seus resultados se baseiam em uma prévia adaptação do modelo Multi-Níveis feita por Nugart (1997) e alguns problemas de convergência encontrados não se replicam no algoritmo de Venner (1991).

Com base nas avaliações do problema transiente feito por Wijnant (1998), Wensing propõe, também em 1999, a utilização das equações ajustadas de amortecimento e aproximação dos corpos para modelar o contato como um sistema linear massa-mola-amortecedor, apresentando seus resultados como influência em um rotor suportado por dois mancais de rolamento.

Tanto o modelo linear para o contato proposto por Wijnant e Wensing (1999), quanto o processo de obtenção dos coeficientes dinâmicos do contato, podem ainda ser melhorados. Como apontado por Wijnant (1998) o contato seco possui uma rigidez não linear característica, que não pode ser desconsiderada. Um modelo não linear para as forças no contato pode ser utilizado, aumentando a precisão do ajuste de tais coeficientes.

É crucial, portanto, a análise transiente do filme em mancais de elementos rolantes, onde os níveis de vibrações devem ser reduzidos. Pode-se, então, considerar o filme de óleo no contato como elemento dinâmico de ligação entre os corpos do sistema e, assim, com influência direta no comportamento dinâmico total.

Modelado o contato existente entre as partes móveis e as características dinâmicas do filme de óleo presente, pode-se estimar o comportamento do mancal sobre certas condições de carregamento, como por exemplo, a resposta em frequência do mancal quando sobre carregamento harmônico, outra característica intrínseca a estes mancais, mesmo quando sob forças constantes. O estudo da interação de tais mancais com rotores, como apresentado em Villa (2007) e Liew (2002), motiva a obtenção de um modelo confiável para dinâmica do mancal como um todo.

A distribuição de carga no mancal completo, para o caso estático, pode ser descrita de várias maneiras. Porém, o método apresentado por Harris (1973) pode ser utilizado para obtenção do carregamento em cada elemento rolante. Desta forma, os valores obtidos por este modelo definem os contatos nos elementos, possibilitando a análise da condição de lubrificação.

Em âmbito nacional, a abordagem do problema de contato é voltada principalmente para as áreas de estudo do atrito tribológico e desgaste, como nos trabalhos de Marcelo Braga do Santos (2005) e Francisco Lepore (2006), Padovese e Maru (2007).

Este trabalho tem por objetivo desenvolver e implementar uma representação matemática consistente para o modelo dinâmico do contato em mancal de elementos rolantes sob lubrificação EHD, contemplando a dependência temporal. Desta forma, é possível estimar coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento, através de um modelo não linear para a força do contato.

## **Capítulo 3**

### ***Desenvolvimento Teórico***

O equacionamento proposto para o modelo de Lubrificação EHD transiente incorpora várias características da mecânica dos sólidos, através da equação de deformação elástica dos corpos, e propriedades reológicas do fluido, viscosidade e densidade, ao estudo da dinâmica do filme, pela Equação de Reynolds. Aliado a tal equacionamento deve-se avaliar também o comportamento dinâmico do sistema como um todo, através da equação de movimento.

Neste capítulo, será delineado o equacionamento EHD teórico para um contato elíptico, isto é, um contato onde a área de distribuição de pressão pode ser representada por uma elipse. Fisicamente, este tipo de contato está presente em mancais de elementos rolantes esféricos e em polias de transmissões toroidais, entre outros.

As características transientes serão analisadas levando em conta um modelo dinâmico para o sistema, a fim de obter uma equação de movimento que represente a dinâmica dos corpos rolantes, tendo como variável principal seu deslocamento relativo à pista.

### ***Deformação Elástica e Balanço de Forças Estático***

A proposta principal da análise EHD é incorporar a deformação elástica dos corpos em contato ao equacionamento. Para tanto, tais deformações devem ser analisadas com cuidado para garantir que seu efeito no filme de óleo seja considerado.

Duas principais hipóteses sobre os corpos devem ser feitas para garantir confiança ao equacionamento:

- A deformação é linear elástica e os dois corpos possuem propriedades uniformes e isotrópicas;
- As dimensões do contato, garantidas pela hipótese supra-citada, são muito menores que as dimensões dos corpos, possibilitando a aproximação dos mesmos por dois corpos semi-infinitos.

Tomando como base estas aproximações, a deformação pontual para dois corpos elásticos em contato, como em Venner(2000), pode ser escrita como:

$$w(x, y) = \frac{2}{\rho E'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(y - y')^2 + (x - x')^2}} \quad 3.1$$

Esta equação relaciona, portanto, a deformação pontual  $w(x, y)$  com a pressão  $p(x', y')$  sobre toda a área de contato entre os corpos. Sendo:

$$E' = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad 3.2$$

o modulo de elasticidade reduzido, para os corpos em contato, que relaciona os coeficientes de Poisson,  $\nu$ , e os módulos de elasticidade,  $E$ . Incorpora-se, então, à equação de deformação elástica a parcela de separação geométrica dos corpos, obtendo-se, assim, uma equação que define a espessura do filme de óleo,  $h(x, y)$ .

Como em um contato Hertziano, os corpos em contato devem ser aproximados por um elipsóide próximo a um plano. Este elipsóide é descrito por duas razões de curvatura, uma longitudinal,  $R_x$ , e uma transversal,  $R_y$ , como esquematizado na figura 3.1:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R1_x} + \frac{1}{R2_x} \quad 3.3$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{R1_y} + \frac{1}{R2_y} \quad 3.4$$

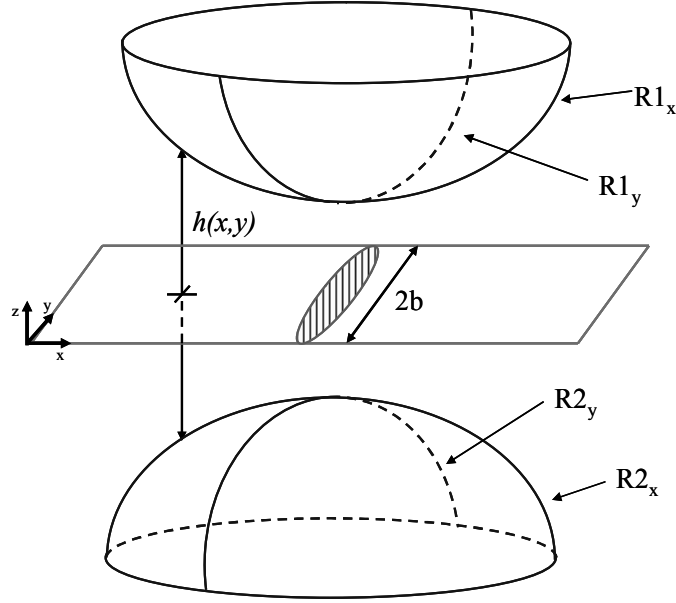


Figura 3.1 - Geometria de dois corpos em contato;

Desta forma, obtém-se a seguinte relação para a espessura:

$$h(x, y) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \frac{2}{pE'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(y - y')^2 + (x - x')^2}} \quad 3.5$$

onde  $h_0$  representa a aproximação dos corpos rígidos. Os dois seguintes termos são a aproximação geométrica para a diferença de altura entre os corpos

Hertz propõe que, para dois corpos de curvaturas conhecidas, como os da figura 3.1, quando pressionados um contra o outro, uma área de contato deve surgir de modo a suportar toda a pressão dentro do limite elástico do material. Desta forma, as deformações sofridas serão posteriormente desfeitas, assim que a força for removida.

A área de contato formada durante o encontro dos corpos foi assumida por Hertz como sendo elíptica. Em seu equacionamento, os corpos são descritos por elipsóides de raio conhecido, sendo esta aproximação muito concisa. Partindo, então, da equação de deformação pontual devido a um campo de pressões, como apresentada no Capítulo 3, chega-se a uma expressão para o semieixo desta elipse, em função de sua elipsidade  $k$ , como a seguir:

$$a = \left( \frac{3fR}{E'} \right)^{1/3} \left( \frac{2kz}{p} \right)^{1/3} \quad 3.6$$

Nesta equação  $f$  é a força no contato e  $R^{-1} = R_x^{-1} + R_y^{-1}$ . A variável  $z$  representa a integral elíptica de segunda ordem, para a respectiva elipsidade. Deve-se definir também a integral elíptica de primeira ordem,  $y$ :

$$z = \int_0^{p/2} \sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 j} \, dj \quad 3.7$$

$$y = \int_0^{p/2} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 j}} \, dj \quad 3.8$$

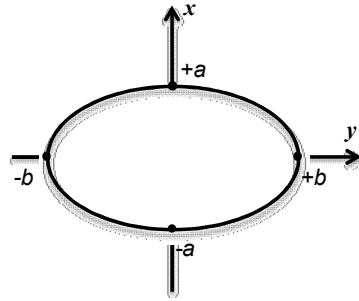


Figura 3.2 – Representação da elipse de contato;

O segundo semieixo da elipse é dado, então, pela razão de elipsidade, ou somente elipsidade do contato:

$$b = a/k \quad 3.9$$

Muitas são as fontes bibliográficas para o equacionamento completo e sua resolução. Porém, a mais comum delas deve ser a apresentada tanto em Changsen (1991), quanto em Harris (1973) e Eschmann (1985), que substitui o equacionamento integral, por tabelas de fatores de deformação previamente calculados. De tal modo, evitam-se os processos iterativos para obtenção de tais valores. Esta abordagem era mais eficiente quando os recursos computacionais eram mais escassos. Agora, porém, até mesmo calculadoras científicas são capazes de executar rotinas de cálculos, tornando o método ultrapassado.

Portanto, dando mais atenção ao equacionamento, como o apresentado em Wijnant(1998), observa-se que existe uma relação puramente geométrica para a elipsidade. Empregando os raios de curvatura reduzidos dos sólidos e as integrais elípticas de primeira e segunda ordem, obtém-se:

$$\frac{R_x}{R_y} = k^2 \frac{y - z}{z - k^2 y} \quad 3.10$$

Utilizando esta expressão, aliada à avaliação numérica das integrais elípticas, e uma rotina iterativa simples, torna-se fácil calcular a forma básica do contato. É interessante notar que para caracterização do equacionamento EHD, as reais dimensões do contato não são necessárias, bastando a elipsidade. Desta forma, a obtenção dos resultados adimensionais pode ocorrer sem a utilização do equacionamento completo de Hertz.

A pressão suportada pelo contato deve, então, ser aproximada por um parabolóide sobre a área de pressão. A pressão máxima de Hertz, que ocorre no centro do contato, pode ser obtida pela relação:

$$p_h = \frac{3f}{2\pi ab} \quad 3.11$$

O carregamento de cada ponto de contato em um mancal de elementos rolantes depende da distribuição de carga. Desta forma, o conjunto de elementos carregados deve dividir pelos

contatos a força total aplicada ao mancal, de modo a balanceá-la. No Apêndice A, está presente o equacionamento de Harris (1973), implementado por Vischi (2008), para obtenção de tal distribuição para um mancal radial de esferas. Os resultados desta distribuição serão posteriormente utilizados como parâmetros para o modelo do contato lubrificado.

Provém também do trabalho de Hertz a expressão para a aproximação de dois pontos não deformados dos corpos em contato, ou seja, a aproximação dos corpos na direção perpendicular ao contato,  $c$ , diretamente relacionada à  $h_0$ , porém sem a presença de óleo lubrificante:

$$c = \frac{a^2}{2R} \left( \frac{y}{z} \right) = \left( \frac{f}{K} \right)^{2/3} \quad 3.12$$

A introdução do termo de rigidez  $K$  na equação deixa claro, como demonstrado em Wijnant (1998), que o contato de Hertz, ou contato seco, possui uma característica de rigidez não linear. Este comportamento foi estudado substituindo o termo de integral da pressão na equação de movimento para corpos em contato. Valendo-se, então, da relação  $f = Kz^{3/2}$ , para representar a força elástica do contato na direção  $z$ , é obtida a equação de movimento do sistema:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + Kz^{3/2} = f(t) \quad 3.13$$

Onde  $m$  é a massa suspensa no contato e  $f(t)$  uma força aplicada ao sistema.

Linearizando a expressão obtida e, portanto, assumindo pequenos deslocamentos em torno do equilíbrio estático, é possível chegar ao período de oscilação, como explicitado em Wijnant (1998), de 5,13 adimensional. Deve-se notar que este valor adimensionalizado corresponde a uma adimensionalização similar àquela utilizada para o contato lubrificado. Desta maneira, este valor pode ser utilizado para balizar a escolha dos valores para as simulações de vibrações livres.



A análise da equação de movimento para o contato seco também pode ser feita através das funções elípticas de *Weierstrasse*. O resultado para a aproximação adimensional dos corpos para três condições iniciais desta função pode ser vista na Figura 3.3.

O valor da constante  $h_0$  dentro do equacionamento tem papel crucial no balanço de forças envolvido. É a aproximação  $h_0$  que garante uma espessura de filme compatível com o nível de carregamento ao qual o mancal está sujeito.

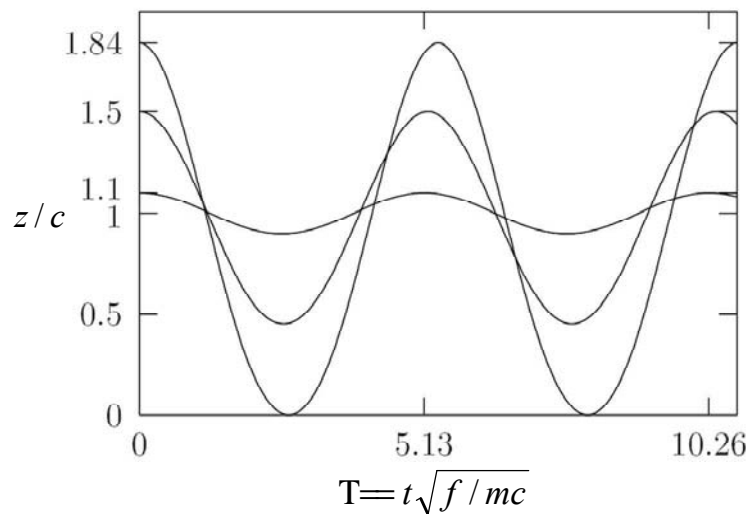


Figura 3.3 – Solução de *Weierstrasse* para a equação de movimento no contato seco, condições iniciais de posição 1.1, 1.5 e 1.84, Wijnant (1998);

O balanço de força deve ser garantido durante a análise do problema, o que é obtido igualando-se a integral da pressão sobre a área analisada com o valor da carga aplicada.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x', y', t) dx' dy' \quad 3.14$$

Durante o processo de cálculo, a diferença entre os dois lados da equação acima pode servir de controle para o valor de  $h_0$ , garantindo o equilíbrio de forças. Para o caso transiente, a variável  $h_0$  torna-se a variável principal do sistema, avaliada pela equação de movimento.

## Lubrificantes

Aliada a análise da deformação elástica dos corpos, faz-se necessária a análise do efeito das altas pressões no lubrificante, muito maiores que em aplicações puramente hidrodinâmicas, como explicitado em Dowson e Higginson (1977). A ausência de conformidade geométrica do contato é o principal motivo para esta característica, pois toda a carga de apoio do contato é suportada pela área de contato de Hertz, de várias ordens de grandeza a menos que os raios de curvatura dos corpos.

Sob alta pressão, o lubrificante não pode mais ser considerado um meio incompressível. Desta forma, Dowson e Higginson (1977) propõem a seguinte formulação adimensional para a relação densidade pressão:

$$\bar{r} = 1 + \frac{a(p/p_h)E'}{1 + b(p/p_h)E'} \quad 3.15$$

sendo  $a$  e  $b$  constantes dependentes do fluido. Esta aproximação é considerada válida até hoje e é utilizada como referência nos trabalhos desta área.

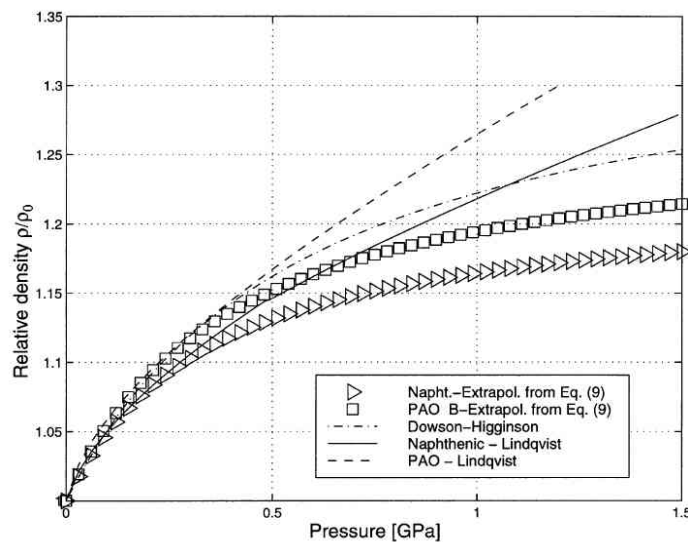


Figura 3.4 - Densidade relativa ( $r/r_0$ ) obtida para vários lubrificantes utilizando a relação proposta por Dowson e Higginson (Larsson, 2000)

Para efeito de aproximação, a relação de densidade-pressão pode ser negligenciada, como em Venner (2000), pois sua variação para a maioria dos fluidos não passa de 30%, frente a variações de até 5 ordens de grandeza da viscosidade. Porém, efeitos importantes de compressibilidade são observados principalmente durante a análise transiente do fenômeno. Desta forma, para um estudo aplicado, o valor de densidade relativa deve ser observado.

As relações exponenciais de Barus para viscosidade, como função da pressão, são referenciadas na maioria dos trabalhos sobre o tema EHD (Dowson e Higginson (1977), Hamrock (1976), Venner (2000)). Esta relação tem boa representação, para uma faixa menor de pressão, para o comportamento do óleo. Porém, com o aumento gradual da pressão, seu valor tende a prever viscosidades muito acima da real. A equação é dada por:

$$h(p) = h_0 \exp(ap) \quad 3.16$$

Portanto, para casos onde o mancal suporta cargas extremas, a relação de Barus não deve ser utilizada. Como uma alternativa aos problemas de super estimação dos valores de viscosidade, é apresentada também a relação de Roelands para viscosidade-pressão. Como em Larson (2000), para uma aproximação da condição isotérmica, deriva-se uma relação da forma:

$$h(p) = h_0 \exp((\ln(h_0) + 9,67)(-1 + (1 + \frac{p}{p_0})^Z)) \quad 3.17$$

Sendo que  $h_0$  é a viscosidade à pressão atmosférica  $p_0$ ,  $p$  é a pressão manométrica em  $\text{kgf/cm}^2$  e  $Z$  é o índice de pressão da viscosidade, segundo Roelands. Hamrock *et al* (1994) disponibiliza um equacionamento completo sobre como obter os valores das constantes  $h_0$  e  $Z$  e, assim, avaliar a formulação completa. Porém, é suficiente ressaltar que tais coeficientes são normalmente adotados como  $p_0 = 1,96.10^8$  e  $Z = 0,67$ , pois o comportamento das curvas de viscosidade é muito similar, representando, assim, um caso intermediário.

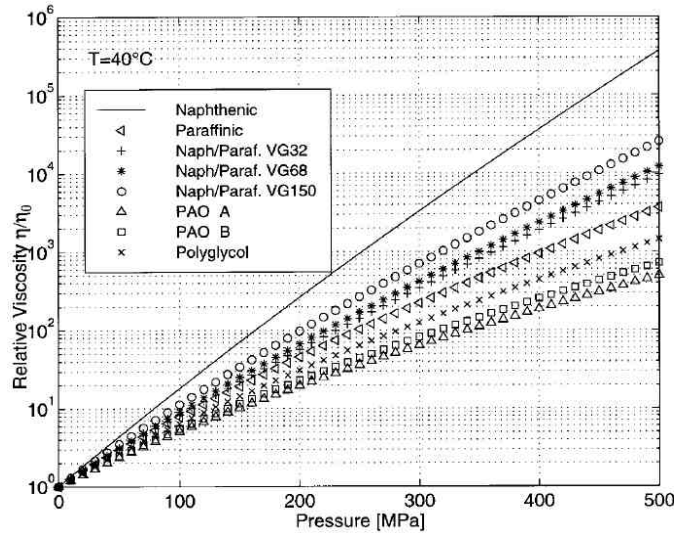


Figura 3.5 - Viscosidade relativa ( $h/h_0$ ) obtida para vários lubrificantes utilizando a relação exponencial de Roelands (Larsson, 2000);

As relações apresentadas representam muito bem a maioria dos casos de aplicação prática da lubrificação EHD. Porém, alguns estudos mais aprofundados do comportamento dos lubrificantes quando solicitados em altas pressões devem ser incorporados para casos especiais, como filmes extremamente finos ou escassez de lubrificante.

A própria relação da viscosidade e de temperatura do lubrificante deve ser incorporada quando a geração de calor é levada em consideração. Para o modelo estudado neste trabalho, a geração de calor pelo cisalhamento do fluido foi desconsiderada. Desta forma, é suficiente tomar a viscosidade de referência à temperatura média de operação do fluido lubrificante. Com isso, fica suficiente utilizar a forma isotérmica da expressão de Roelands.

## ***Equacionamento de Reynolds***

A equação de Reynolds resulta das equações de movimento e continuidade de Navier-Stokes, com o objetivo de descrever o comportamento dinâmico do filme de óleo através do acoplamento da distribuição de velocidades com a equação da continuidade, para o escoamento do lubrificante.

Para tanto, são feitas algumas hipóteses.

- Não existem forças externas atuando no filme de óleo e sua inércia pode ser desconsiderada em comparação às taxas de cisalhamento a que está sujeito.
- Não existe variação de pressão através do filme, levando a não variação das propriedades do lubrificante nesta mesma direção.
- A curvatura dos corpos é muito maior que a espessura do filme.

O tamanho da área de contato e, por consequência, a área do filme afetada pela pressão, são definidos pelas características do contato hertziano. Para esses tipos de corpos, com geometria não conforme, estas áreas são muito pequenas, pois estão dentro do limite elástico, e não devem gerar deformações plásticas no material. Esta característica garante que as dimensões do contato sejam muito menores que as dimensões dos corpos.

Devido à espessura do filme de óleo ser muito pequena, a quantidade de lubrificante sujeito às condições de pressão no contato é muito pequena, e, conseqüentemente, sua massa, ou seja, sua inércia, pode ser desconsiderada. Também por esse motivo, na direção perpendicular ao plano de contato, as propriedades do filme não devem se alterar, assim como à pressão. Tal simplificação possibilita tratar o problema da lubrificação EHD como um sistema de duas dimensões,  $x$  e  $y$ , enquanto na direção normal temos a espessura do filme,  $h(x,y)$ .

Desta forma Reynolds, em 1886, propôs a seguinte relação para o escoamento entre superfícies próximas, já tomando como base um escoamento unidimensional, sem efeitos de variações de velocidade através do domínio, ou seja, sem deslizamento:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{r h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = u_m \frac{\partial(rh)}{\partial x} + \frac{\partial(rh)}{\partial t} \quad 3.18$$

Onde  $u_m$  é a soma das velocidades superficiais dos corpos 1 e 2, quando constantes em  $x$ . Assim, o eixo  $x$  está alinhado com a velocidade de entrada do fluido, isto é, com a direção de rotação dos corpos.

Nesta equação, os dois primeiros termos são conhecidos como termos de *Poiseuille* e descrevem o fluxo de lubrificante devido ao gradiente de pressão. O terceiro termo descreve o fluxo devido às velocidades médias entre as superfícies de contato e é conhecido como termo de *Couette*. O último termo é conhecido como termo de *Squeeze*, que representa o fluxo devido a efeitos de transientes da variação de espessura (Venner, 2000).

Deve-se observar que, nesta forma, a equação de Reynolds assume comportamentos diferentes entre áreas de alta e baixa pressão. Quando sob alta pressão, devido ao aumento exponencial da viscosidade, o fluido deve comportar-se apenas pelos últimos dois termos, pois o termo de *Poiseuille* se torna muito pequeno. O problema se torna um problema de Advecção, mais comumente tratado na área térmica para descrever fenômenos de transporte em um fluido em movimento. As influências de tal comportamento serão melhor entendidas durante o desenvolvimento numérico do equacionamento.

Por fim, a equação representa um problema diferencial de segunda ordem e não linear, devido aos termos dependentes da pressão. Muitas são as formas de trabalhar com tais problemas, como por exemplo pelo método dos volumes finitos ou diferenças finitas. Historicamente, a tratativa dada à equação de Reynolds se dá através do Método das Diferenças Finitas, tanto no caso hidrodinâmico quanto no EHD. Desde as primeiras avaliações computacionais do problema, como visto em Hamrock (1975) até atualmente em Goodyer (2001) e Wijnat (1998), os esforços se concentram em otimizar a solução da mesma.

Fisicamente, o lubrificante, quando atinge a pressão de vaporização, cria um vazio, preenchido por vapor do lubrificante à mesma pressão. A pressão somente retornará a pressão ambiente se o meio externo ocupar o espaço criado. A este efeito dá-se o nome de *Cavitação*. Seguindo as premissas utilizadas para descrever o modelo, o equacionamento de Reynolds não leva em conta tal efeito e tais valores podem ser encontrados pela equação se não tratada corretamente (Wijnat, 1998). Assumindo que pressões abaixo da pressão ambiente são suficientemente baixas ao ponto de cavitatar o lubrificante, deve-se assumir pressão positiva para

todos os pontos do domínio, garantindo sempre a presença de um filme de óleo e a lubrificação do contato.

É necessário garantir também uma condição de contorno para a equação de Reynolds. Neste caso, as bordas do domínio têm sua pressão assumida igual à zero, ou seja, a pressão ambiente. Sendo o domínio analisado suficientemente grande, para que não ocorra influência da pressão do contato na pressão das bordas, esta condição é verdadeira.

## ***Equação de Movimento***

O modelo transiente EHD demanda a incorporação de termos transientes nas equações básicas do problema. Em alguns casos tratados durante as primeiras investigações deste problema, às descontinuidades nas superfícies, além da adição do termo de *Squeeze* na equação de Reynolds, era acrescido um fator transiente na equação da espessura de filme. Neste trabalho, porém, como o objetivo é avaliar a dinâmica do contato, é necessário definir a variável principal, que governa os corpos.

A constante de integração  $h_0$ , que no caso não transiente garante o balanço de forças estático no contato, se transforma na variável principal dinâmica, pois fisicamente representa a aproximação de dois pontos não deformados nos corpos em contato, ou seja, a aproximação dos mesmos.

Utilizando, então, uma abordagem newtoniana do sistema, considerando a pista como elemento fixo e, desta forma, o elemento rolante é o componente que se encontra livre para vibrar. A equação de movimento do sistema se torna:

$$m \frac{d^2 h_0}{dt^2} + \iint_S p(x, y, t) dx dy = f(t) \quad 3.19$$

Onde  $m$  representa a massa do elemento rolante e  $f(t)$  é o carregamento aplicado sobre o contato. Este carregamento pode ser variante no tempo ou não, como para o caso de vibrações

livres. Como toda equação diferencial de movimento, duas condições iniciais devem ser utilizadas para avaliação da mesma: uma para posição inicial dos corpos e uma para velocidade de aproximação.

Fisicamente, a introdução de uma condição inicial de posição em um sistema esfera pista em movimento é complexa, devido, basicamente, a rotação dos corpos apoiados um contra o outro. A aplicação direta do carregamento harmônico é mais simples, porém a variação do carregamento em adição aos efeitos dinâmicos se torna computacionalmente custosa, e somente alguns casos específicos podem ser avaliados. Entretanto, é suficiente obter a resposta em vibração livre do sistema para poder caracterizar o contato dinamicamente.

O segundo termo da equação de movimento representa a integral da pressão sobre o domínio, ou seja, a força no contato entre os corpos. Este termo, posteriormente, deve ser aproximado por um conjunto dinâmico de rigidez e amortecimento, de forma a caracterizar dinamicamente o contato. A priori, este termo é obtido pela integral da pressão obtida pela equação de Reynolds aplicada ao filme de lubrificante.

O modelo, como aqui apresentado, não possui uma tratativa direta, sendo necessária a aplicação de um método numérico para obter a solução do sistema de equações. No próximo capítulo será introduzida a modelagem numérica do equacionamento e os métodos utilizados na solução.



## **Capítulo 4**

### ***Equacionamento Numérico***

Para obter os perfis de pressão e espessura de filme lubrificante no contato EHD, uma tratativa numérica deve ser dada ao equacionamento. Em sua forma atual, muitas são as variáveis do problema e a descrição do mesmo se apresenta complexa. Neste capítulo, serão abordados os métodos numéricos utilizados para solucionar o sistema de equações que modelam o contato EHD, de forma a reduzir sua complexidade.

Primeiramente, será apresentada a adimensionalização do equacionamento, que, como previsto para um equacionamento numérico, tem por objetivo diminuir o número de variáveis do sistema, facilitando sua avaliação. O modelo já consolidado de Moes (1992) será utilizado para descrever o contato, porém as adimensionalizações geométricas serão estudadas com o objetivo de obter um modelo mais adequado para o equacionamento dinâmico.

Posteriormente, será apresentado o Método Multi-Níveis para solução de problemas de diferenças finitas. Este método se baseia no modelo proposto por Venner e Ludbrecht em 1991 (Venner, 2000), que foi estendido para o modelo dinâmico. Aplicações similares podem ser vistas em Wijnant (1998). Por fim, será apresentada a adequação do equacionamento não dimensional ao método numérico, de modo a obter um algoritmo funcional para avaliação do problema.

## Adimensionalização do Equacionamento

De posse do sistema de equações descritas no capítulo anterior, 3.5 e 3.14 a 3.19, pode-se obter, então, o perfil de pressão e a espessura de filme lubrificante como função das características do contato EHD. Algumas características do filme de óleo podem ser interessantes para o projeto de sistema mecânicos que possuem esse tipo de contato. Por exemplo, a espessura mínima de filme, que garante uma continuidade do filme de óleo por todo o contato, evitando falhas por falta de lubrificação.

Pode-se verificar que, nesta forma, são 9 os parâmetros necessários para descrever as características do contato EHD,  $u_m$ ,  $r_0$ ,  $h_0$ ,  $a$ ,  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $E'$ ,  $f$ , conforme tabela 4.1. Desta forma, a espessura mínima do filme ou a espessura central, em  $(x,y)=(0,0)$ , são funções desses parâmetros não independentes.

Tabela 4.1 – Parâmetros de caracterização do contato EHD;

Parâmetros	
$u_m$	Velocidade relativa
$r_0$	Densidade a pressão ambiente
$h_0$	Viscosidade a pressão ambiente
$a$	Índice pressão-viscosidade.
$R_x$	Razão de curvatura longitudinal
$R_y$	Razão de curvatura transversal
$E'$	Módulo de elasticidade reduzido
$f$	Carga aplicada

Para reduzir o número de parâmetros, facilitando uma análise paramétrica, as equações podem ser adimensionalizadas. As variáveis principais como pressão e espessura podem ser adimensionalizadas de forma a ter seu valor dentro de uma faixa de interesse, como de zero a um. Desta maneira, utilizando os parâmetros do contato seco de Hertz e as propriedades do filme de óleo à pressão ambiente se tem:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{r}{r_0} & H &= \frac{hR_x}{a^2} \\ \bar{h} &= \frac{h}{h_0} & P &= \frac{p}{p_h}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Porém, a adimensionalização das coordenadas gerais espaciais do problema pode ser feita de duas maneiras. A primeira, como apresentado em Nijenbanning(1994), onde, seguindo a proposta de Venner, tanto a dimensão transversal quanto a dimensão longitudinal do contato são adimensionalizadas pelo semi-eixo menor da elipse de contato.

$$X = \frac{x}{a} \quad Y = \frac{y}{a}\tag{4.2}$$

São duas as implicações maiores desta abordagem. O eixo  $Y$  se torna maior que a unidade em sua extensão dentro do contato. O que implica em maior número de pontos para a mesma discretização do outro eixo. Entretanto, desta maneira, o equacionamento discreto difere muito pouco do equacionamento já previsto para o contato circular, deduzido em Venner (2000) e presente em Nonato (2008), porém o número de pontos no domínio fica dependente da elipsidade. Quanto menor a elipsidade, maior o número de pontos na direção  $Y$ .

A segunda forma de adimensionalização é a utilizada por Wijnant (1998), onde cada direção é adimensionalizada por seu respectivo semi-eixo. Desta forma:

$$X = \frac{x}{a} \quad Y = \frac{y}{b}\tag{4.3}$$

Com estas novas relações o número de pontos em ambas as direções é o mesmo, pois cada uma varia agora apenas de uma unidade dentro da área de contato. Esta abordagem tem maior impacto na equação de espessura de filme. Quando são substituídos os grupos adimensionais na equação proposta no Capítulo 3, obtém-se:

$$H(x, y) = H_0 + SX^2 + (1 - S)Y^2 + \frac{1}{\gamma p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(X', Y') dX' dY'}{\sqrt{(Y - Y')^2 + k^2 (X - X')^2}} \quad 4.4$$

Sendo:

$$S = \frac{z - k^2 y}{z - k^2 y} \quad 4.5$$

A presença do termo de elipsidade dentro da integral de deformação altera o comportamento da mesma em relação às suas direções. Como será demonstrado posteriormente, o modelo utilizado para avaliação desta integral utiliza ciclos de correção em cada direção da somatória. Com a influência da elipsidade, o desacoplamento dos eixos é maior e um maior número de correções é necessário.

Para comparar qual das duas formas é mais propícia para a simulação dinâmica do contato EHD, foi utilizado o modelo de contato seco para avaliar apenas a integral de deformação. O equacionamento utilizado foi o mesmo proposto em Nonato (2008). Na tabela a seguir, com os valores de tempo computacional e resíduo para vários casos de elipsidade. Pode-se observar que para a adimensionalização de Wijnant e elipsidade até 0,085, os tempos são sempre maiores, porém o resíduo apresenta um comportamento muito melhor. Para o caso extremo de elipsidade 0,050 o tempo computacional se manteve para o modelo de Wijnant, enquanto que para o de Nijenbanning aumentou consideravelmente.

Tabela 4.2 – Resíduo numérico e tempo computacional para avaliação da integral de deformação no contato seco elíptico;

Modelo Wijnant			Modelo Nijenbanning	
k	Residuo	T(s)	Residuo	T(s)
<b>0,500</b>	4,47x10 <sup>-5</sup>	17,71	1,22x10 <sup>-4</sup>	4,92
<b>0,100</b>	7,33x10 <sup>-5</sup>	25,39	9,96x10 <sup>-3</sup>	20,60
<b>0,085</b>	7,64x10 <sup>-5</sup>	26,26	1,52x10 <sup>-2</sup>	24,46
<b>0,050</b>	1,92x10 <sup>-3</sup>	27,14	5,75x10 <sup>-2</sup>	49,67

Desta forma, a adimensionalização de Wijnant foi a escolhida para ser utilizada durante a avaliação dinâmica do problema, pois mesmo com o tempo de integração superior o resíduo é bem menor devido ao menor números de pontos a integrar.

Desta forma, a equação de Reynolds, na forma não dimensional, torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{r} H^3}{\bar{h} \bar{l}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + k^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{r} H^3}{\bar{h} \bar{l}} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial(\bar{r} H)}{\partial X} - \frac{\partial(\bar{r} H)}{\partial T} = 0 \quad 4.6$$

Sendo:

$$\bar{l} = \frac{6u_m h_0 (2R)^2}{a^3 p_h} \left( \frac{z}{y} \right)^2 \quad 4.7$$

As relações para as propriedades dos fluídos também devem ser adimensionalizadas, apresentando-se na forma:

$$\bar{r} = \frac{5,9 \cdot 10^8 + 1,34 p_h P}{5,9 \cdot 10^8 + p_h P} \quad 4.8$$

$$\bar{h} = \exp((\ln(h_0) + 9,67)(-1 + (1 + \frac{p_h}{p_0} P)^Z)) \quad 4.9$$

$$\bar{h} = \exp(\bar{a} P) \quad \bar{a} = a p_h \quad 4.10$$

A equação da espessura de filme utilizada será, então, a apresentada na Equação 4.4. Sendo que a constante  $H_0$  será, agora, determinada pela relação adimensional de balanço de força, quando em situação estática:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(X, Y) dX dY = \frac{2p}{3} \quad 4.11$$

Já quando sob solicitação dinâmica, a constante  $H_0$  é determinada pela equação de movimento do sistema. Com a introdução da variável tempo ao equacionamento estático, faz-se necessário adimensionalizá-la como todas as outras coordenadas. Para isso, utiliza-se a relação  $T = tu_m / (2a)$ . Por fim, a forma não dimensional da equação de movimento se torna:

$$\frac{1}{\Omega_n^2} \frac{d^2 H_0}{dT^2} + \frac{3}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(X, Y) dXdY = 1 + A_h \sin(\Omega_e T) \quad 4.12$$

Neste caso, é interessante definir duas frequências inerentes a equação. A primeira delas,  $\Omega_n$ , pode ser considerada a frequência natural adimensional do sistema, pois incorpora a massa suspensa, ou seja, a massa do elemento rolante. Este fator surge do processo de adimensionalização da equação do movimento. A segunda, por sua vez, é a frequência adimensional de excitação,  $\Omega_e$ .

$$\Omega_n^2 = \frac{8fR}{mu_m} \frac{z}{y} \quad 4.13$$

$$\Omega_e = \frac{2aW}{u_m} \quad 4.14$$

Nesta forma, o equacionamento estático apresenta um número bem menor de variáveis independentes. Tomando  $p_0 = 1,96 \cdot 10^8$  e  $h_0 = 40,0 \cdot 10^{-3}$ , o total de 9 variáveis foi substituído por apenas três,  $\bar{a}$ ,  $\bar{l}$  e  $k$ . Desta forma, características obtidas através dos cálculos como a espessura mínima adimensional,  $H_m$ , ou a espessura central adimensional,  $H_c$ , são apenas funções destas três variáveis.

Historicamente, outros parâmetros adimensionais são utilizados para caracterizar o contato EHD, porém, devido ao fato de seus valores não estarem dentro de um intervalo específico, como os apresentados acima, sua utilização, às vezes, não é muito clara. Para fins de comparação, estes parâmetros serão introduzidos apenas para caracterizar os estudos de caso durante o trabalho. Tanto  $\bar{a}$  quanto  $\bar{l}$  são funções destes novos parâmetros, como apresentado em Wijnant (1999).

Os parâmetros utilizados serão os propostos por Moes (1992):

$$M = \frac{w}{E'R_x^2} \left( \frac{h_0 u_s}{E'R_x} \right)^{-3/4} \quad 4.15$$

$$L = aE' \left( \frac{h_0 u_s}{E'R_x} \right)^{1/4} \quad 4.16$$

Para contatos EHD diferentes regimes são definidos com base nestes parâmetros, sendo  $M$  relacionado à carga imposta e  $L$ , às características do lubrificante, os quais são apresentados na Tabela 4.3:

Tabela 4.3 - Diferentes regimes da Lubrificação EHD (Venner, 2000)

<i>Regime</i>	<i>M</i>	<i>L</i>
Rígido / Isoviscoso	Pequeno	0
Rígido / Piezovisco	Pequeno	Grande
Elástico / Isoviscoso	Grande	0
Elástico / Piezovisco	Grande	Grande

## **Modelo Numérico Multi-Níveis**

Nesta dissertação duas técnicas multi-níveis serão abordadas. O primeiro caso apresenta o modelo Multi-Níveis para solução de equações diferenciais, lineares ou não, referido aqui simplesmente por Método Multi-Níveis. O segundo caso é o da integração em múltiplos níveis, que se baseia nas mesmas premissas do Método Multi-Níveis, porém, é adaptado a equacionamentos integrais, garantindo maior eficiência dos mesmos.

Como a base de problemas de equações diferenciais é resolver um sistema discreto de equações para cada passo de relaxação, o objetivo do método Multi-Níveis é obter uma resolução mais eficiente possível para esse sistema em uma malha desejada.

Pode-se, então, denominar tal malha como uma malha alvo, com um refinamento suficiente para a solução e uma hierarquia de malhas, partindo de uma malha fina no nível  $k$ , para uma malha mais grossa, no nível  $k-1$ , como na figura 4.1.

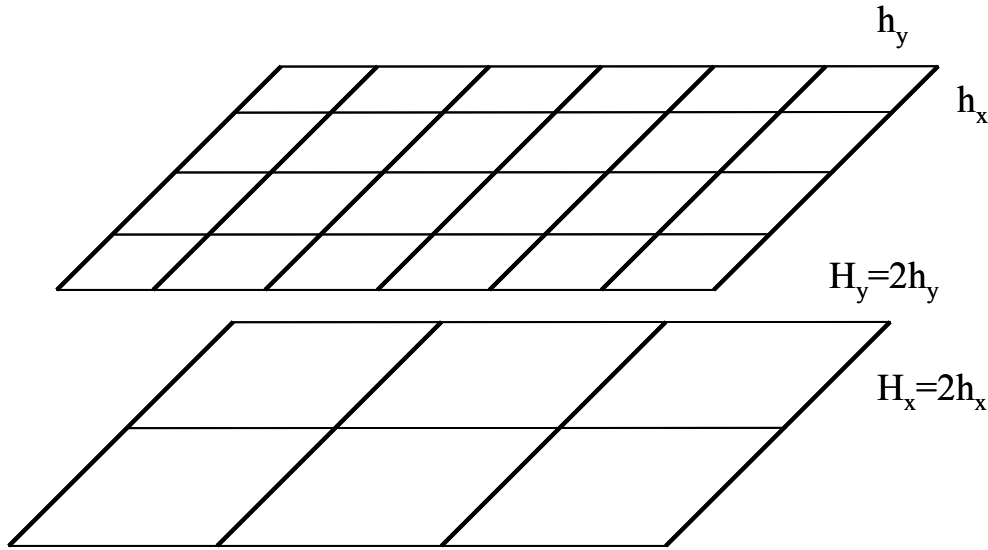


Figura 4.1 - Hierarquia de malhas; malha fina  $(h_x, h_y)$  nível  $k$ , malha grossa  $(H_x, H_y)$  nível  $k-1$ ;

Como consequência deste tipo de discretização, a malha fina possui pontos coincidentes com a malha grossa, além de pontos intermediários no valor médio entre os pontos precedentes. Desta forma, a operação entre as malhas se torna mais simples.

### ***Esquema de Correção e Lógica Multi-Níveis***

Considerando, então, um caso linear mais simples, o sistema gerado pela equação diferencial a ser resolvida, é dado por:

$$L\underline{u} = \underline{f} \quad 4.17$$

Onde  $L$  é o operador diferencial que define a forma do sistema,  $\underline{u}$  o vetor solução com os valores em cada ponto e  $\underline{f}$  é a função do lado direito do sistema de equações. Portanto, para cada



malha, deve-se solucionar o sistema para  $\underline{u}$ , com um número fixo de pontos  $N$  em uma direção, sendo  $N=2^h+1$  para o nível  $h$ . Desta forma, o problema é representado por:

$$L^h \underline{u}^h = \underline{f}^h \quad 4.18$$

sendo que a cada passo de solução, isto é, a cada relaxação sobre a malha, um novo vetor resultado  $\underline{\tilde{u}}^h$  é encontrado.

Vários métodos de relaxação podem ser utilizados. Os mais comumente citados pela literatura são Gauss-Sidel e Jacobi, cada um com seus benefícios para diferentes condições do sistema a ser resolvido. Como a formação do sistema a ser resolvido depende do operador diferencial do mesmo, cada caso necessita de uma abordagem diferenciada para o método de relaxação. Portanto, estes serão explorados quando oportuno no texto. Neste capítulo, esta parte da solução será denominada somente por relaxação do sistema.

O novo vetor encontrado é uma aproximação da solução da Equação 4.18 e possui um resíduo numérico,  $\underline{r}^h$ , que é definido por:

$$\underline{r}^h = \underline{f}^h - L^h \underline{\tilde{u}}^h \quad 4.19$$

desta forma:

$$\underline{r}^h = L^h \underline{u}^h - L^h \underline{\tilde{u}}^h \quad 4.20$$

sendo  $L^h$  um operador linear:

$$\underline{r}^h = L^h (\underline{u}^h - \underline{\tilde{u}}^h) \quad 4.21$$

Agora o operador  $L$  aplica-se a uma diferença, o erro da solução, definido como:

$$\underline{e}^h = \underline{u}^h - \underline{\tilde{u}}^h \quad 4.22$$

O processo de relaxação deve ser repetido tantas vezes quanto necessário, para reduzir este erro abaixo de um valor especificado de precisão do resultado. Substituindo, então, a Equação 4.22 em 4.21, obtém-se:

$$L^h \underline{e}^h = \underline{r}^h \quad 4.23$$

onde o erro é a solução do mesmo problema aplicado, porém com o lado direito sendo o vetor residual. Desta forma, para tratar o erro, utiliza-se o mesmo processo de solução do problema.

Como descrito em Wijnant (1998), a função erro encontrada é dependente dos seus valores prévios e posteriores a relaxação, e pode ser interpretada como uma função periódica. Desta forma, uma abordagem, onde o erro é tratado pelas suas componentes em frequência, torna-se útil para o entendimento da divisão em malhas de diferentes tamanhos do modelo Multi-Níveis. Sendo, então, o erro composto de componentes em diferentes frequências, como na Figura 4.2, seu comportamento em malhas de diferentes refinamentos também será diferente.

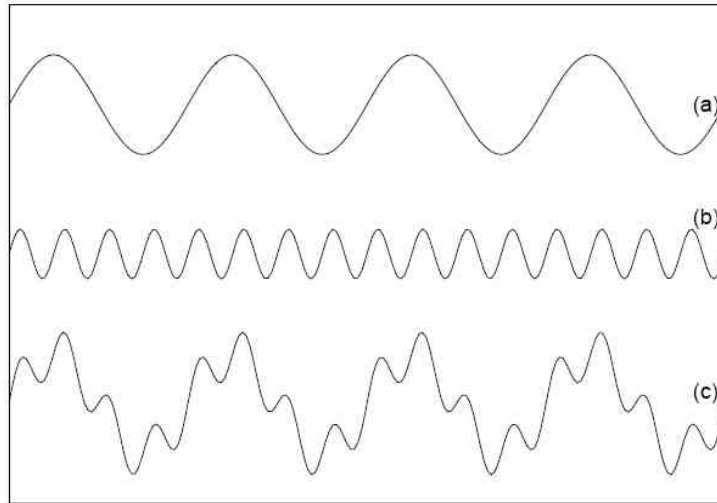


Figura 4.2 - Função periódica de baixa frequência (a); alta frequência (b) ; Combinação linear das funções (c), como na função erro (Goodyear, 2001);

Os métodos de relaxação normalmente utilizados têm alto poder de redução dos erros de alta frequência, ou seja, casos onde a frequência tem a mesma ordem de grandeza dos intervalos de discretização da malha. Com o aumento do domínio computacional, ou seja, aumento do número de pontos, estes métodos se tornam ineficientes para reduzir os erros de baixa frequência. Desta forma, após um certo número de relaxações, a redução da função erro se torna lenta e, conseqüentemente, a taxa de convergência do processo diminui (Wijnant, 1998).

Com o intuito de acelerar a taxa de convergência, pode-se operar com a função erro após certo número de relaxações em uma malha mais grosseira. O comportamento do erro é mais suave, isto é, sem a influência de componentes de altas frequências. Com isso, a taxa de convergência voltaria a subir devido a esta malha ter intervalos maiores, mais próximos das frequências do erro. Trabalhando na malha mais grosseira somente com o erro, após um certo número de relaxações, as correções devem ser trazidas para a malha mais fina, por um processo de interpolação entre os pontos de origem.

O processo iterativo na malha mais grosseira é idêntico ao utilizado para as malhas mais finas. De fato, o sistema resolvido é o mesmo, porém, os valores do lado direito são alterados pela introdução do erro vindo da malha mais fina. Desta forma, o sistema é resolvido para o erro e não para a variável principal. Com isso, o número de relaxações para convergência diminui, e os valores da variável principal são tratados nas malhas mais finas.

Esse processo pode ser repetido até se atingir uma malha tão grossa que um certo número pré-determinado de equações resolva, com a precisão desejada, o sistema. Este processo é denominado *Esquema de Correção* (CS, do inglês *Correction Scheme*).

O caso onde um ciclo de correção na malha grosseira é aplicado por nível é chamado de *ciclo em V*. Um fluxograma esquemático do mesmo está representado na figura 4.3.

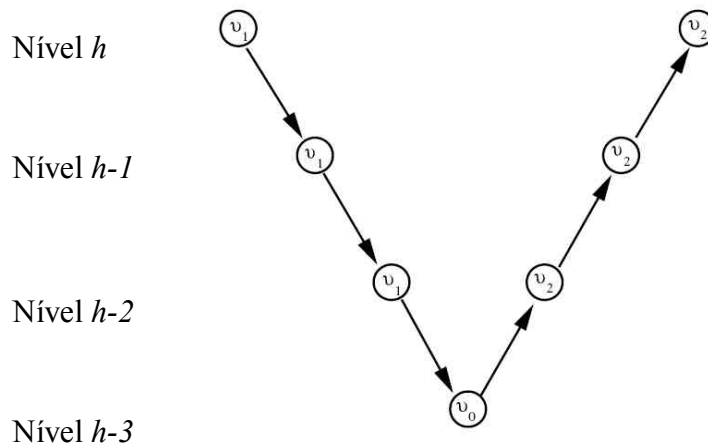


Figura 4.3 - Esquema Ciclo em V;

Para cada nível, partindo do mais refinado  $h$ , são executados  $u_1$  pré-relaxações e transferências até a malha mais grosseira. Nesta malha, ocorrem  $u_0$  relaxações, resultando em uma primeira aproximação das correções para malhas mais finas. Estes valores são transpostos para as malhas mais finas, partindo agora de  $h-3$ , e executando  $u_2$  pós-relaxações por malha, até atingir a malha alvo  $h$ .

Da mesma forma, mais de um ciclo de correção por nível pode ser aplicado, como esquematizado na Figura 4.4. Neste caso, dois ciclos de correção por malha grossa são executados, sendo denominado *Ciclo em W*. A grande vantagem do ciclo em W é que, para cada nível, existe o dobro de relaxações, em comparação ao ciclo em V.

Apesar dos ciclos aceitarem com qualquer condição inicial, para se reduzir os erros nas malhas mais finas, uma primeira aproximação obtida pela interpolação dos resultados provindos de malhas mais grossas, já com certo grau de convergência, elimina grande parte dos ciclos necessários para chegada à convergência final. Para tanto, o algoritmo Multi-Níveis Completo (FMG, do inglês *Full Multi-Grid*) se baseia em ciclos iniciados na malha mais grosseira. Nos valendo dos exemplos para quatro níveis acima, a Figura 4.5 esquematiza tal operação:

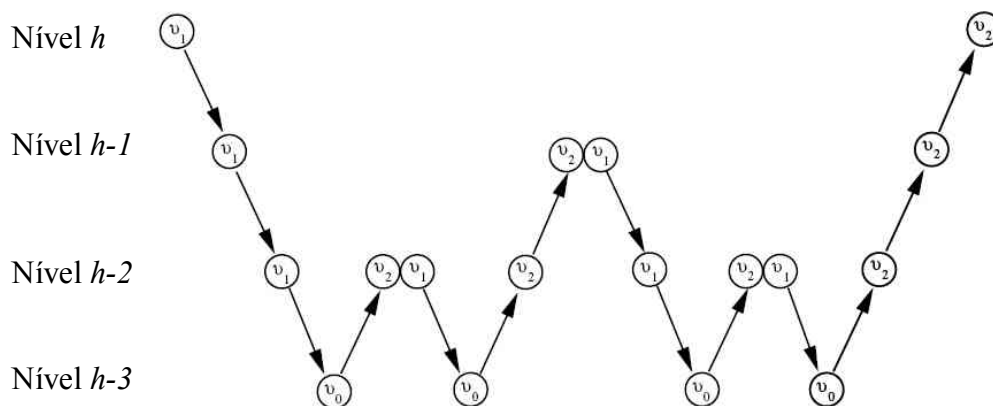


Figura 4.4 – Esquema Ciclo em W;

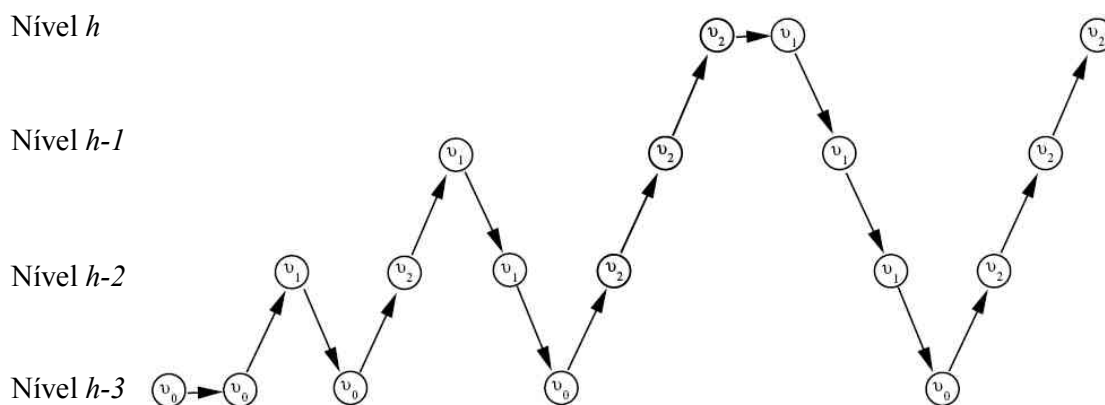


Figura 4.5 - Esquema Ciclo FMG;

Neste processo, um ciclo V é utilizado por nível, porém tal procedimento pode ser utilizado com ciclos W. Tais ciclos são a base do funcionamento dos algoritmos de relaxação pelo método Multi-Níveis.

### **Esquema de Aproximação Completo**

O Esquema de Correção descrito se comporta bem para problemas lineares, porém, muitas vezes, as equações envolvidas no sistema são não lineares, como é o caso do problema da

lubrificação Elastohidrodinâmia. Neste caso, o operador do sistema,  $L$ , não só é aplicado sobre a variável  $u$ , como também depende dela.

Para que o sistema seja resolvido, o Esquema de Correção, utilizado nos ciclos do algoritmo, deve ser substituído por um método mais robusto, pois o comportamento do erro agora também não é linear e depende da solução. Tal método é conhecido por Esquema de Aproximação Completo (FAS, do inglês *Full Approximation Scheme*).

Tomando como base a Equação 4.20, o operador  $L$  não pode ser diretamente fatorado. Desta maneira, deve-se utilizar a definição do erro, Equação 4.22, de forma que:

$$\underline{r}^h = L^h(\underline{\tilde{u}}^h + \underline{e}^h) - L^h \underline{\tilde{u}}^h \quad 4.24$$

rearranjando:

$$L^h(\underline{\tilde{u}}^h + \underline{e}^h) = L^h \underline{\tilde{u}}^h + \underline{r}^h \quad 4.25$$

Sendo um nível de malha mais grossa,  $H$ , representado pelo sistema:

$$L^H \underline{\hat{u}}^H = \underline{\hat{f}}^H \quad 4.26$$

Seu vetor variável principal,  $\underline{\hat{u}}^H$ , será definido como o erro nesta malha mais a transferência dos valores de  $\underline{\tilde{u}}^H$ .

$$\underline{\hat{u}}^H = I_h^H \underline{\tilde{u}}^h + \underline{e}^H \quad 4.27$$

Desta maneira, os valores convergidos da malha  $h$  são a primeira aproximação na malha  $H$ . Nesta equação, o primeiro operador entre malhas,  $I_h^H$ , que será definido posteriormente, é utilizado dentro do esquema de solução. Diferentemente do CS, os valores não são somente

transpostos, mas também ponderados pelo operador. Este operador transfere e pondera os valores da vizinhança do ponto em questão na malha  $h$  para a malha  $H$ .

O termo  $\underline{\hat{f}}^H$  é o lado direito do sistema FAS e é definido por:

$$\underline{\hat{f}}^H = L^H (I_h^H \underline{\tilde{u}}^h) + I_h^H \underline{r}^H \quad 4.28$$

Utilizando este sistema, depois de um certo número de relaxações, uma aproximação para a solução no nível  $H$  é encontrada,  $\underline{\tilde{u}}^H$ , e utilizada para atualizar os valores na malha mais fina  $h$ . A atualização se dá seguindo a relação:

$$\underline{\bar{u}}^h = \underline{\tilde{u}}^h + I_h^h (\underline{\tilde{u}}^H - I_h^H \underline{r}^H) \quad 4.29$$

Os novos valores corrigidos na malha  $h$  servirão de valor inicial para mais relaxações sobre a malha, porém com o benefício de um erro sem grande influência das altas frequências. Numa malha grossa, esta aproximação também é válida, o que torna a lógica Multi-Níveis recursiva, podendo ser aplicada a mais níveis com discretizações menos finas.

Com a possibilidade de resolver os problemas lineares e não-lineares, são requeridas apenas as funções para transposição entre malhas para que a base numérica do equacionamento Multi-Níveis seja implementada.

### ***Funções de Operação entre Malhas***

São várias as maneiras de se operar entre as malhas no método Multi-Níveis. Contudo, a maneira mais eficiente e menos custosa é utilizar algum tipo de ponderação dos pontos da vizinhança, tanto para uma *expansão* quanto para uma *restrição*.

Um operador de expansão, denotado por  $I_h^h$ , deve injetar diretamente os pontos da malha mais grossa  $H$  na malha fina  $h$  e, através de uma interpolação dos pontos vizinhos, prover os

resultados para os pontos não coincidentes da malha mais fina, como esquematizado na figura 4.6.

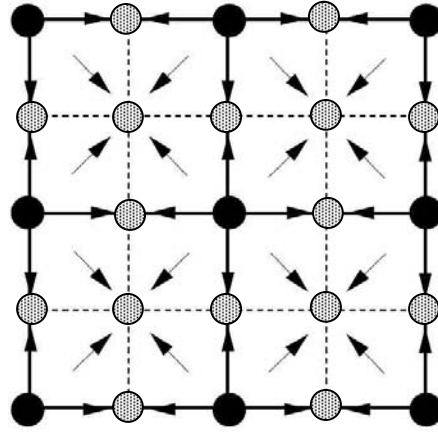


Figura 4.6- Descrição esquemática do operador de expansão (Goodyer,2001);

A fim de simplificar a notação, os operadores serão descritos matricialmente, sendo que, o elemento central da matriz é o fator que multiplica o elemento sendo transposto, e os outros elementos são os fatores de ponderação para os pontos da vizinhança. Este tipo de notação é comumente denominada *Stencil*.

Para o operador de expansão teremos:

$$I_H^h = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad 4.30$$

Desta maneira, o valor do ponto de interesse terá peso 0,5 no valor dos pontos diretamente vizinhos e 0,25 para os pontos vizinhos pela diagonal.

No caso do operador de restrição, duas são as possibilidades. Pode-se usar a injeção direta dos pontos, com o custo de perda da influência dos pontos da vizinhança. Para tanto, somente os pontos coincidentes são transpostos da malha fina  $h$  para a malha grossa  $H$ .



Uma segunda opção é a ponderação completa dos pontos da vizinhança, como segue o *Stencil*:

$$I_h^H = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad 4.31$$

É interessante notar que o operador de expansão na Equação 4.30 é o transposto do operador de expansão na Equação 4.31, uma característica importante para problemas lineares. Da mesma forma que para o operador de expansão, os pontos vizinhos serão ponderados diferentemente. Neste caso, o ponto de interesse terá seu valor formado por metade do valor do ponto correspondente na malha grossa, um quarto do valor dos pontos diretamente vizinhos e  $1/16$  do valor dos pontos vizinhos pela diagonal. A figura 4.7 apresenta uma descrição esquemática do procedimento.

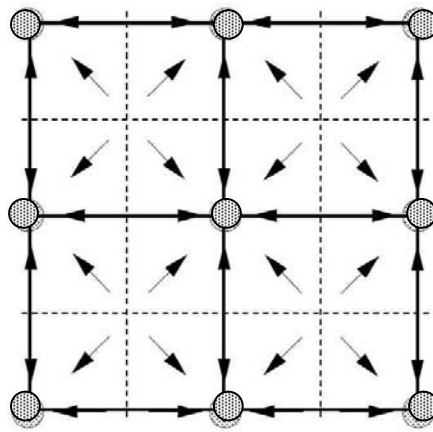


Figura 4.7 - Descrição esquemática do operador de restrição (Goodyer,2001);

## ***MLMI – Integração Múltipla Multi-Níveis***

Parte dos problemas de integração em engenharia, física ou matemática, possuem a distinta característica de se aplicarem sobre um domínio  $\Omega$  e serem avaliados para cada ponto deste domínio. Esta condição é conhecida por *Integração Múltipla* ou *Transformação Integral*.

O problema da deformação elástica, descrito como parte integrante da lubrificação Elastohidrodinâmica é um deles, como observado na Equação 3.5. A integral da deformação será tomada aqui como exemplo, para o desenvolvimento numérico do método MLMI, que consiste em aplicar um modelo Multi-Níveis para um problema integral.

Um problema geral, de integração múltipla, pode ser lido como:

$$w(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy \quad 4.32$$

onde  $K$  é a função *kernel* ou núcleo dependente dos dois espaços definidos pelos grupos de variáveis  $x(x_1, x_2, \dots)$ , e  $y(y_1, y_2, \dots)$ . Esta função pode ser discretizada como uma matriz,  $K^{hh}$ , ao custo de um erro de discretização controlado, chamada matriz núcleo. Assim, como a função dessa matriz deve ser suave e densa, o problema dado pela Equação 4.32 se transforma em uma multiplicação matriz-vetor, quando a função  $u$  também é discretizada. O procedimento da transformada é aplicável a casos de mais de uma dimensão, separando as variáveis nos espaços e aplicando a transformada uma a uma.

Parte das vantagens de se trabalhar com um modelo multi-nível é poder operar em uma malha mais grossa, e corrigir os valores da malha fina, poupando tempo de processamento. Porém, a eficiência do algoritmo só esta garantida ao se trabalhar com uma função suave. Portanto, deve-se procurar uma maneira de se operar com a matriz núcleo na malha grossa e utilizar os valores calculados para corrigir o valor da transformada na malha fina. Para descrever esta relação se utilizará a descrição do equacionamento presente em Goodyer (2001).

Discretizando, então, a Equação 4.32 em uma malha regular de  $n_x$  pontos, para um nível  $h$ , tem-se:

$$w_i^h = w^h(x_i^h) = \sum_{j=1}^{n_x^h} K_{i,j}^{hh} u_j^h \quad 4.33$$

Deve-se escrever a transformada  $w_i^h$  como função dos valores da matriz núcleo  $K^{hh}$  no nível mais grosso. Para facilitar a notação, o nível  $h-1$  será denominado por  $H$  e os pontos  $I$  e  $J$  serão os pontos coincidentes a  $i$  e  $j$  da malha fina. Para primeiro entendimento, deve-se tomar o exemplo por unidimensional.

Utilizando uma interpolação de ordem suficientemente alta, uma aproximação para matriz núcleo no nível mais fino pode ser encontrada, a partir de uma matriz discretizada em uma malha mais grosseira. Sendo  $K_{i,j}^{hH}$  esta discretização, e o operador de interpolação dado por  $I_H^h$ , obtém-se:

$$\tilde{K}_{i,j}^{hh} = [I_H^h K_{i,\bullet}^{hH}]_j \quad 4.34$$

Onde o sinal  $(\bullet)$  se refere a interpolação na direção  $y$ , variável muda da Equação 4.32, tendo como resultado o índice  $j$ .

A Equação 4.33 pode ser escrita levando-se em conta esta aproximação e o erro pontual:

$$w_i^h = \sum_{j=1}^{n_x^h} \tilde{K}_{i,j}^{hh} u_j^h + \sum_{j=1}^{n_x^h} (K_{i,j}^{hh} - \tilde{K}_{i,j}^{hh}) u_j^h \quad 4.35$$

Deve-se lembrar que somente pontos coincidentes da malha foram usados para obter a expressão da Equação 4.34, pois  $K_{i,j}^{hH}$  são os pontos de malha fina injetados diretamente sobre os pontos de malha grossa. Desta forma, o erro  $(K_{i,j}^{hh} - \tilde{K}_{i,j}^{hh})$  deve ser nulo nos pontos coincidentes. Fora destes pontos, o erro é da ordem do erro introduzido pela interpolação. Sendo a função suave sobre o domínio, ou parte dele, esse erro é pequeno, e pode ser desconsiderado, o que torna a Equação 4.35 em:

$$w_i^h \approx \tilde{w}_i^h = \sum_{j=1}^{n_x^h} \tilde{K}_{i,j}^{hh} u_j^h = \sum_{j=1}^{n_x^h} [I_H^h K_{i,\bullet}^{hH}]_j u_j^h = \sum_{J=1}^{n_x^H} K_{i,J}^{hH} \left[ (I_H^h)^T u_\bullet^h \right]_J \quad 4.36$$

Onde a operação inversa a interpolação é dada por  $(I_H^h)^T$ , a transposta da matriz de interpolação. Consecutivamente, defini-se o vetor solução na malha grossa:

$$u_J^H = \left[ (I_H^h)^T u_\bullet^h \right]_J \quad 4.37$$

Após tais transformações, a integração na malha grossa se transforma em:

$$w_i^h \approx \tilde{w}_i^h = \sum_{J=1}^{n_x^H} K_{i,J}^{hH} u_J^H \quad 4.38$$

Agora, o mesmo processo pode ser aplicado para  $x$ . Analogamente, a aproximação na malha fina da matriz núcleo será dada por:

$$\hat{K}_{i,j}^{hh} = [I_H^h K_{\bullet,j}^{Hh}]_i \quad 4.39$$

Aplicando, desta vez, a aproximação da Equação 4.39 na malha fina, tem-se:

$$w_i^h = [I_H^h w_\bullet^H]_i + \sum_{j=1}^{n_x^h} (K_{i,j}^{hh} - \hat{K}_{i,j}^{hh}) u_j^h \quad 4.40$$

onde:

$$w_I^H = \sum_{j=1}^{n_x^H} K_{I,j}^{Hh} u_j^h \quad 4.41$$

Utilizando as mesmas premissas do caso em  $y$ , onde  $K_{I,j}^{Hh}$  deve ser uma injeção direta dos pontos coincidentes de malha fina na mais grossa, e  $K$  é suficientemente suave para o grau do polinômio utilizado, a Equação 4.41 torna-se:

$$w_i^h = \left[ I_H^h w_{\bullet}^H \right]_i \quad 4.42$$

Desta forma, fica definida a integração para uma função  $K$  suave na malha fina, depois de combinar os resultados em  $x$  e  $y$ , como:

$$w_i^h \approx \left[ I_H^h \sum_{J=1}^{n_x^H} K_{\bullet,J}^{hH} u_J^H \right]_i = \sum_{J=1}^{n_x^H} K_{I,J}^{HH} u_J^H \quad 4.43$$

Entretanto, no caso da deformação elástica, envolvido no problema de lubrificação elastohidrodinâmica, a função núcleo possui uma região de singularidade nas proximidades de  $x=y$ . Faz-se necessária uma correção da função encontrada para a integral na malha fina. Primeiramente, deve-se considerar os pontos coincidentes das malhas grossa e fina, isto é,  $h$  e  $H$ .

$$w_i^h = \sum_{j=1}^{n_x^h} \tilde{K}_{i,j}^{hh} u_j^h + \sum_{(i,j) \in \Omega_{\text{sing}}} (K_{i,j}^{hh} - \tilde{K}_{i,j}^{hh}) u_j^h + \sum_{(i,j) \notin \Omega_{\text{sing}}} (K_{i,j}^{hh} - \tilde{K}_{i,j}^{hh}) u_j^h \quad 4.44$$

A Equação 4.44 aplica, então, a correção do erro de aproximação aos pontos pertencentes ou não a zona da singularidade,  $\Omega_{\text{sing}}$ . Deve-se notar que na zona suave, ou seja, fora da singularidade, o erro de aproximação tende a zero, pois somente os pontos coincidentes são considerados, desta forma:

$$w_i^h = \sum_{j=1}^{n_x^h} \tilde{K}_{i,j}^{hh} u_j^h + \sum_{(i,j) \in \Omega_{\text{sing}}} (K_{i,j}^{hh} - \tilde{K}_{i,j}^{hh}) u_j^h = w_i^H + \sum_{(i,j) \in \Omega_{\text{sing}}} (K_{i,j}^{hh} - \tilde{K}_{i,j}^{hh}) u_j^h \quad 4.45$$

E para os pontos não coincidentes, retomando a Equação 4.40, tem-se:

$$w_i^h = [I_H^h w^\bullet]_i + \sum_{(i,j) \in \Omega_{\text{sing}}} (K_{i,j}^{hh} - \tilde{K}_{i,j}^{hh}) u_j^h \quad 4.46$$

Portanto, na solução para malha fina da equação de deformação, utilizando a multi-integração, deve-se primeiro calcular a somatória na malha grossa e, posteriormente, utilizar a equação 4.45 para corrigir ao entorno da singularidade. Em seguida, interpolam-se os valores da malha grossa para obter os valores dos pontos não coincidentes, corrigindo-os na singularidade, de acordo com a Equação 4.46 (Goodyer, 2001).

Parte do problema está em obter uma área suficientemente grande, ao redor da singularidade, para que a correção imposta seja suficiente para garantir a influência destes pontos. Portanto,  $(i, j) \in \Omega_{\text{sing}}$  deve ser estipulado com cuidado. Para cada dimensão  $i$  será definido um raio de singularidade  $m$ , tal que  $\Omega_{\text{sing}}^i = \{j \in \Omega : |i - j| < m\}$ .

Este raio de singularidade, no caso do contato circular, deve prover área suficiente para correção, porém não deve comprometer a convergência do algoritmo. Segundo Venner (1994),  $m$  deve ser da ordem de  $\ln(1/h)$  para uma direção e, garantida a suavidade da função em todas as dimensões, sua operação independente garante que para as outras direções uma constante pequena é suficiente.

Para o caso do contato elíptico, tais raios de correção devem ser corrigidos pelo fator de elipsidade. Assim, pode-se garantir qualquer anomalia da singularidade devido ao comportamento, agora diferente, de ambos as direções de integração.

## ***Discretização do Modelo Elastohidrodinâmico - EHD***

O conjunto de equações discretas utilizado pelo método Multi-Níveis é o mesmo utilizado para outros métodos de solução, que utilizam apenas uma malha. Estas equações são discretizadas sobre uma malha uniforme, com espaçamentos de  $h$  em duas direções,  $X$  e  $Y$ , num domínio  $X_a < X < X_b$  e  $-Y_a < Y < Y_a$ .

Utilizando uma discretização tipo *Poiseuille* para a equação de Reynolds obtém-se, para um ponto  $(i,j)$ , a relação:

$$\frac{x_{i-1/2,j}^h P_{i-1,j}^h - (x_{i-1/2,j}^h + x_{i+1/2,j}^h) P_{i,j}^h + x_{i+1/2,j}^h P_{i+1,j}^h}{h^2} + \quad 4.47$$

$$k^2 \frac{x_{i,j-1/2}^h P_{i,j-1}^h - (x_{i,j-1/2}^h + x_{i,j+1/2}^h) P_{i,j}^h + x_{i,j+1/2}^h P_{i,j+1}^h}{h^2} - (\bar{r}H)_x^h - (\bar{r}H)_T^h = 0$$

onde  $P_{(i,j)}=0$  para todos os pontos da borda do domínio. Os coeficientes  $x_{i\pm 1/2,j}^h$  e  $x_{i,j\pm 1/2}^h$  são os valores médios de  $x^h$  entre os pontos da diferença, como na figura 4.8.

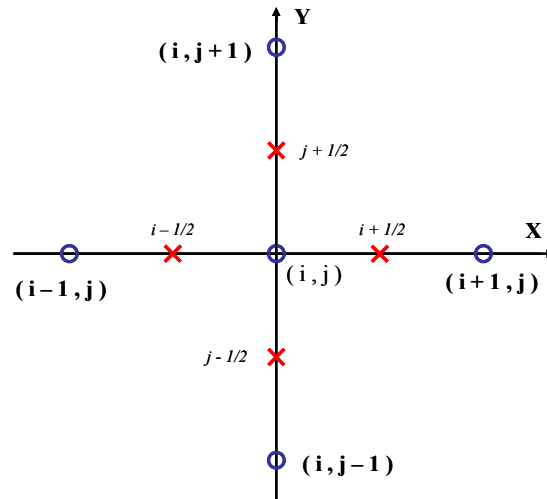


Figura 4.8 - Estrutura de discretização dos pontos da malha;

Sendo  $x^h$ , no ponto  $(i,j)$ , dado por:

$$x_{i,j}^h = \frac{\bar{r}_{(P_{i,j}^h)} (H_{i,j}^h)^3}{\bar{h}_{(P_{i,j}^h)}} \quad 4.48$$

A forma discreta do termo de *Couette*,  $(\bar{r}H)_x^h$ , deve ser avaliada com cautela. Uma aproximação por diferença central de segunda ordem, apesar de simples e aplicável a quase todo

o domínio, pode apresentar problemas de instabilidade quando a pressão é elevada. Esta característica se deve ao fato de a espessura do filme de óleo depender da pressão e, com este tipo de operação, o ponto central desconsiderado introduz muita incerteza na aproximação, o que aumenta o tempo computacional.

Como proposto por Venner (1994), uma discretização de segunda ordem, porém à frente, aumenta a precisão da operação:

$$(\bar{r}H)_x^h = \frac{1,5\bar{r}_{i,j}^h H_{i,j}^h - 2\bar{r}_{i-1,j}^h H_{i-1,j}^h + 0,5\bar{r}_{i-2,j}^h H_{i-2,j}^h}{h} \quad 4.49$$

Esta operação só pode ser usada para  $i > 2$  e deve ser substituída para os pontos próximos a fronteira da malha.

$$(\bar{r}H)_x^h = \frac{\bar{r}_{i,j}^h H_{i,j}^h - \bar{r}_{i-1,j}^h H_{i-1,j}^h}{h} \quad 4.50$$

Seguindo por similaridade, o termo de *Squeeze*, deve ser analisado da mesma maneira. Porém agora se adicionam às direções  $X$  e  $Y$  o eixo do tempo não dimensional  $T$ , com sua discretização  $h_T$ . O tamanho de  $h_T$  deve ser o dobro do tamanho da discretização na direção de rolamento, como descrito em Wijnant (1998) e Goodyer (2001), garantindo uma redução mais eficaz do erro também durante a integração.

Utilizando o terceiro índice,  $w$ , para representar o passo temporal, a discretização do termo de *Squeeze* se torna:

$$(\bar{r}H)_T^h = \frac{1,5\bar{r}_{i,j,w}^h H_{i,j,w}^h - 2\bar{r}_{i,j,w-1}^h H_{i,j,w-1}^h + 0,5\bar{r}_{i,j,w-2}^h H_{i,j,w-2}^h}{h_T} \quad 4.51$$



Utilizando o modelo desenvolvido para o MLMI, a equação de espessura de filme pode ser escrita como:

$$H_{i,j}^h = H_0 + SX_i^2 + (1-S)Y_j^2 + \sum_{i'} \sum_{j'} K_{i,i',j,j'}^{hh} P_{i',j'}^h \quad 4.52$$

Para uma aproximação da pressão sobre um elemento da malha,  $h \times h$ , em torno de um ponto  $(X_{i'}, Y_{j'})$ , a matriz núcleo para o problema bi-dimensional é obtida de:

$$K_{i,i',j,j'}^{hh} = \frac{2}{p^2} \int_{Y_j-h/2}^{Y_j+h/2} \int_{X_i-h/2}^{X_i+h/2} \frac{dX'dY'}{\sqrt{k^2(X_i - X')^2 + (Y_j - Y')^2}} \quad 4.53$$

que pode ser obtido analiticamente, como descrito em Wijnant (1998), por:

$$\begin{aligned} K_{i,i',j,j'}^{hh} = \frac{2}{p^2} \{ & |X_p| \arcsin\left(\frac{Y_p}{X_p}\right) + |Y_p| \arcsin\left(\frac{X_p}{Y_p}\right) \\ & - |X_m| \arcsin\left(\frac{Y_p}{X_m}\right) - |Y_p| \arcsin\left(\frac{X_m}{Y_p}\right) \\ & - |X_p| \arcsin\left(\frac{Y_m}{X_p}\right) - |Y_m| \arcsin\left(\frac{X_p}{Y_m}\right) \\ & + |X_m| \arcsin\left(\frac{Y_m}{X_m}\right) + |Y_m| \arcsin\left(\frac{X_m}{Y_m}\right) \} \end{aligned} \quad 4.54$$

sendo:

$$\begin{aligned} X_p &= X_i - X_{i'} + h/2 \\ X_m &= X_i - X_{i'} - h/2 \\ Y_p &= (Y_j - Y_{j'} + h/2)/k \\ Y_m &= (Y_j - Y_{j'} - h/2)/k \end{aligned} \quad 4.55$$

Para uma malha uniforme, a matriz núcleo é função apenas de  $|i - i'|$  e  $|j - j'|$ , desta forma, pode-se estimá-la previamente e guardá-la em uma matriz  $n_x$  por  $n_y$ . Os índices da matriz serão, então, substituídos de forma que  $|i - i'| = k$  e  $|j - j'| = l$ , tornando-se  $K_{i,i',j,j'}^{hh} = K_{k,l}^{hh}$ .

Por fim, tem-se a equação de balanço de forças e a equação de movimento. Para o caso estático, o balanço de forças toma a forma de somatório das pressões adimensionais.

$$h^2 \sum_i \sum_j P_{i,j}^h = \frac{2p}{3} \quad 4.56$$

Porém, como a constante  $H_0$  está presente diretamente no cálculo da equação de movimento, esta deve ser avaliada por um integrador, a fim de obter seu valor corretamente a cada intervalo de tempo. Como delineado em Goodyer (2001) e em Wijnant (1998), um integrador implícito de segunda ordem tipo Newmark- $\beta$  pode ser utilizado. Este tipo de integrador é comumente utilizado no método de elementos finitos.

Representando por  $u$  a variável principal de integração e isolando sua segunda derivada em relação ao tempo, ou seja, sua aceleração, da Equação 4.12, na forma somatória tem-se:

$$\ddot{u} = \left( 1 + A_f \sin(\Omega_e T) - h^2 \frac{3}{2p} \sum_i \sum_j P_{i,j}^h \right) \Omega_n^2 \quad 4.57$$

A relações de Newmark para avaliar a velocidade e posição permitem isolar a variável principal, a aproximação dos corpos. Desta forma, obtém-se uma expressão para esta variável como função de sua velocidade, aceleração e si mesma no passo anterior de integração. Já substituindo a forma da aceleração da Equação 4.57, sendo  $n$  a iteração presente, tem-se:

$$u_n = u_{n-1} + h_T \dot{u}_{n-1} + \frac{1}{4} h_T^2 \ddot{u}_{n-1} + E + E A_f \sin(\Omega_e T) - E h^2 \frac{3}{2p} \sum_i \sum_j P_{i,j}^h \quad 4.58$$

Onde:

$$E = \frac{1}{4} h_T^2 \Omega_n^2 \quad 4.59$$

Pode-se definir a força dinâmica:

$$F_{din} = u_{n-1} + h_T \dot{u}_{n-1} + \frac{1}{4} h_T^2 \ddot{u}_{n-1} + E + EA_f \sin(\Omega_e T) \quad 4.60$$

Desta forma, a equação se torna:

$$u_n = F_{din} - Eh^2 \frac{3}{2p} \sum_i \sum_j P_{i,j}^h \quad 4.61$$

A este equacionamento discreto pode-se aplicar o método Múlti-Níveis, utilizando um processo de relaxação para obtenção das distribuições de pressão e espessura de filme. O processo empregado na relaxação será descrito na próxima seção.

## ***Relaxação do Equacionamento Discreto***

De forma a obter um processo de relaxação que seja eficaz na redução das componentes de alta frequência, a natureza das equações deve ser entendida. O comportamento geral da equação de Reynolds é guiado principalmente pela grandeza de  $x_{i,j}^h$ . Como a viscosidade relativa do lubrificante varia em várias ordens de grandeza pelo domínio, o valor de  $x_{i,j}^h$  também varia, sendo muito pequeno nas áreas de alta pressão, e elevado nas áreas de baixa pressão.

Esta característica leva a uma mudança do comportamento das equações do modelo elastohidrodinâmico quando sobre altas cargas ou baixas cargas. Portanto, o método de relaxação a ser aplicado deve contemplar tais mudanças no problema e ser suficientemente robusto, garantindo a convergência em todos os casos.

O problema deve ser dividido em duas partes, para áreas com valores altos de  $x_{i,j}^h$  e áreas com valores baixos. Para o primeiro caso, a equação de Reynolds passa a ser dominada pelos termos de *Poiseuille* e uma técnica de relaxação menos complexa, como Gauss-Siedel ponto a ponto.

Utilizando a Equação 4.47 pode-se calcular um valor de pressão aproximado,  $\bar{P}_{i,j}^h$ , partindo de um valor inicial,  $\tilde{P}_{i,j}^h$ , e ponderando-se os valores vizinhos:

$$\bar{P}_{i,j}^h = \tilde{P}_{i,j}^h + w d_{i,j}^h \quad 4.62$$

Sendo  $w$  o fator de relaxação e  $d_{i,j}^h$  a mudança a ser aplicada sobre o ponto, que pondera os valores vizinhos sobre o ponto central. Neste tipo de relaxação, os valores previamente calculados para um ponto são utilizados para corrigir os novos pontos calculados. Porém, como os valores de  $x_{i,j}^h$  variam muito dentro do domínio, a utilização de um valor fixo do coeficiente de relaxação pode reduzir muito a velocidade de convergência, principalmente com o fato de que, com a diminuição gradativa de  $x_{i,j}^h$ , as componentes do erro em alta frequência passam a ser amplificadas. Assim, um modelo mais robusto deve ser utilizado (Venner, 2000).

Como proposto por Venner (2000), uma relaxação em linha deve estabilizar o sistema, ao aplicar a correção dos pontos não somente para cada elemento  $(i,j)$  da malha, mas atualizando os valores no comprimento total em uma direção da malha. Desta forma, a relaxação passa a ser composta da solução de  $n_y$  sistemas lineares de  $n_x$  equações, sendo  $n_x$  e  $n_y$  o número de pontos em  $x$  e  $y$  respectivamente. Este modelo deve ser também pouco custoso computacionalmente, pelo fato da matriz do sistema poder ser considerada uma matriz banda. Isso se deve aos pontos mais distantes do ponto alvo influenciar muito pouco o ponto calculado.

Desta forma, o sistema para uma linha  $i$  qualquer é dado por:

$$A^j \underline{d}_j^h = \underline{r}_j^h \quad 4.63$$

onde  $\underline{d}_j^h$  é o vetor com as mudanças  $d_{i,j}^h$  para cada ponto da linha sendo relaxada e  $\underline{r}_j^h$  é o vetor dos atuais resíduos  $r_{i,j}^h$  na linha. Os dois vetores possuem  $n_x$  elementos e os elementos da matriz  $A^j$  são obtidos por:

$$A_{i,k}^j = \left. \frac{\partial L_{i,j}^h \langle \underline{P}^h \rangle}{\partial P_{k,j}} \right|_{\underline{P}^h = \tilde{\underline{P}}^h} \quad 4.64$$

Nesta última equação aparece o operador do sistema  $L_{i,j}^h$ , que representa a equação de Reynolds e é aplicado a um vetor de pressões  $\underline{P}^h$  da linha a ser relaxada. Este operador descreve a discretização da equação de Reynolds no ponto, levando em conta o lado direito da mesma equação quando avaliada pelo esquema de aproximação completo, de acordo com:

$$\begin{aligned} L_{i,j}^h \langle \underline{P}^h \rangle = & \frac{x_{i-1/2,j}^h P_{i-1,j}^h - (x_{i-1/2,j}^h + x_{i+1/2,j}^h) P_{i,j}^h + x_{i+1/2,j}^h P_{i+1,j}^h}{h^2} \\ & + k^2 \frac{x_{i,j-1/2}^h P_{i,j-1}^h - (x_{i,j-1/2}^h + x_{i,j+1/2}^h) P_{i,j}^h + x_{i,j+1/2}^h P_{i,j+1}^h}{h^2} \\ & - \frac{1,5 \bar{\Gamma}_{i,j}^h H_{i,j}^h - 2 \bar{\Gamma}_{i-1,j}^h H_{i-1,j}^h + 0,5 \bar{\Gamma}_{i-2,j}^h H_{i-2,j}^h}{h} \\ & - \frac{1,5 \bar{\Gamma}_{i,j,w}^h H_{i,j,w}^h - 2 \bar{\Gamma}_{i,j,w-1}^h H_{i,j,w-1}^h + 0,5 \bar{\Gamma}_{i,j,w-2}^h H_{i,j,w-2}^h}{h_T} = p f_{i,j}^h \end{aligned} \quad 4.65$$

Suas derivadas parciais devem ser avaliadas para os casos onde somente os principais termos estão presentes. Desta forma, tem-se:

$$|i-k| > 1 \quad A_{i,k}^j = - \frac{1,5 \tilde{\Gamma}_{i,j}^h K_{|i-k|,0}^{hh} - 2 \tilde{\Gamma}_{i-1,j}^h K_{|i-k-1|,0}^{hh} + 0,5 \tilde{\Gamma}_{i-2,j}^h K_{|i-k-2|,0}^{hh}}{h} - \frac{1,5 \tilde{\Gamma}_{i,j,w}^h K_{|i-k|,0,w}^{hh}}{h_T} \quad 4.66$$

$$i = k \quad A_{i,i}^j = -\frac{\sum \tilde{x}^h}{h^2} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j}^h K_{0,0}^{hh} - 2\tilde{r}_{i-1,j}^h K_{1,0}^{hh} + 0,5\tilde{r}_{i-2,j}^h K_{2,0}^{hh}}{h} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j,w}^h K_{0,0,w}^{hh}}{h_T} \quad 4.67$$

Sendo:

$$\sum \tilde{x}^h = \tilde{x}_{i+1/2,j}^h + \tilde{x}_{i-1/2,j}^h + k^2 (\tilde{x}_{i,j+1/2}^h + \tilde{x}_{i,j-1/2}^h) \quad 4.68$$

Dois outros casos são:

$$i > 1 \quad A_{i,i-1}^j = -\frac{\tilde{x}_{i-1/2,j}^h}{h^2} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j}^h K_{1,0}^{hh} - 2\tilde{r}_{i-1,j}^h K_{0,0}^{hh} + 0,5\tilde{r}_{i-2,j}^h K_{1,0}^{hh}}{h} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j,w}^h K_{1,0,w}^{hh}}{h_T} \quad 4.69$$

$$i < n_x - 1 \quad A_{i,i+1}^j = -\frac{\tilde{x}_{i+1/2,j}^h}{h^2} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j}^h K_{1,0}^{hh} - 2\tilde{r}_{i-1,j}^h K_{2,0}^{hh} + 0,5\tilde{r}_{i-2,j}^h K_{3,0}^{hh}}{h} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j,w}^h K_{1,0,w}^{hh}}{h_T} \quad 4.70$$

O lado direito deste sistema é definido pelo vetor resíduo dado por:

$$\begin{aligned} r_{i,j}^h = & \frac{P f_{i,j}^h - \tilde{x}_{i-1/2,j}^h \tilde{P}_{i-1,j}^h - (\tilde{x}_{i-1/2,j}^h + \tilde{x}_{i+1/2,j}^h) \tilde{P}_{i,j}^h + \tilde{x}_{i+1/2,j}^h \tilde{P}_{i+1,j}^h}{h^2} \\ & - k^2 \frac{\tilde{x}_{i,j-1/2}^h \tilde{P}_{i,j-1}^h - (\tilde{x}_{i,j-1/2}^h + \tilde{x}_{i,j+1/2}^h) \tilde{P}_{i,j}^h + \tilde{x}_{i,j+1/2}^h \tilde{P}_{i,j+1}^h}{h^2} \\ & + \frac{1,5\tilde{r}_{i,j}^h \tilde{H}_{i,j}^h - 2\tilde{r}_{i-1,j}^h \tilde{H}_{i-1,j}^h + 0,5\tilde{r}_{i-2,j}^h \tilde{H}_{i-2,j}^h}{h} \\ & + \frac{1,5\tilde{r}_{i,j,w}^h \tilde{H}_{i,j,w}^h - 2\tilde{r}_{i,j,w-1}^h \tilde{H}_{i,j,w-1}^h + 0,5\tilde{r}_{i,j,w-2}^h \tilde{H}_{i,j,w-2}^h}{h_T} \end{aligned} \quad 4.71$$

Onde as variáveis assinaladas com “ $\sim$ ” são as aproximações para os valores principais e o valor de  $\tilde{P}_{i,j-1}^h$  é o único já calculado pela relaxação, por se tratar de valores da linha  $j-1$ . É interessante notar que na derivada do termo de *Squeeze* apenas o primeiro termo discretizado está em função da pressão no ponto avaliado, os outros termos são função da pressão em passos de integração anteriores e, portanto, iguais a zero quando derivados.

Para proceder com o processo de relaxação, o sistema montado deve ser resolvido para as atualizações. Como dito anteriormente, apesar da matriz do sistema ser cheia, a mesma pode ser aproximada por uma matriz hexa-diagonal, formada pelos pontos onde  $i-3 < k < i+2$ . Desta forma, pela distância em relação ao ponto calculado para cada linha, os coeficientes  $K_{i,0}^{hh}$  se tornam muito pequenos, não influenciando no valor final. Utilizando a Equação 4.62, para cada linha, os valores de  $P$  devem ser atualizados.

Porém, dentro da própria linha calculada, o valor de  $x_{i,j}^h$  varia significativamente e um processo híbrido de relaxação pode melhorar o comportamento em relação ao grau de convergência do equacionamento. Isso se deve, principalmente, por ser a equação de Reynolds dominada pelo valor do termo de *Couette* e de *Squeeze*, o que implica em acúmulo de erros por parte da aproximação calculada da espessura do filme a partir do novo valor de pressão.

O termo de *Couette* expressa uma equação na direção  $X$  somente, desta forma a direção  $Y$  é acoplada somente pela deformação elástica, isto é, componentes oscilatórias em  $Y$  não serão tão eficientemente reduzidas pela relaxação. Entretanto, como o termo de *Squeeze* trabalha na coordenada tempo, seus efeitos serão sentidos como uma propagação de variações de espessura durante a integração.

Para tanto, uma técnica de relaxação tipo Jacobi pode ser utilizada, em conjunto com a relaxação em linha. Os procedimentos quanto a solução do sistema linear gerado pela relaxação da linha são os mesmos, porém a matriz  $A$ , que gera o sistema, é dada por:

$$A_{i,k}^j = \left\{ \frac{\partial L_{i,j}^h \langle \underline{P}^h \rangle}{\partial P_{k,j}} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial L_{i,j}^h \langle \underline{P}^h \rangle}{\partial P_{k+1,j}} + \frac{\partial L_{i,j}^h \langle \underline{P}^h \rangle}{\partial P_{k-1,j}} + \frac{\partial L_{i,j}^h \langle \underline{P}^h \rangle}{\partial P_{k,j+1}} + \frac{\partial L_{i,j}^h \langle \underline{P}^h \rangle}{\partial P_{k,j-1}} \right) \right\} \bigg|_{\underline{P}^h = \tilde{\underline{P}}^h} \quad 4.72$$

Onde as derivadas para os termos principais são:

$$|i-k| > 1 \quad A_{i,k}^j = -\frac{1,5\tilde{r}_{i,j}^h \Delta K_{|i-k|,0}^{hh} - 2\tilde{r}_{i-1,j}^h \Delta K_{|i-k-1|,0}^{hh} + 0,5\tilde{r}_{i-2,j}^h \Delta K_{|i-k-2|,0}^{hh}}{h} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j,w}^h \Delta K_{|i-k|,0,w}^{hh}}{h_T} \quad 4.73$$

$$i = k \quad A_{i,i}^j = -\frac{5}{4} \frac{\sum \tilde{x}^h}{h^2} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j}^h \Delta K_{0,0}^{hh} - 2\tilde{r}_{i-1,j}^h \Delta K_{1,0}^{hh} + 0,5\tilde{r}_{i-2,j}^h \Delta K_{2,0}^{hh}}{h} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j,w}^h \Delta K_{0,0,w}^{hh}}{h_T} \quad 4.74$$

$$i > 2 \quad A_{i,i-2}^j = -\frac{1}{4} \frac{\tilde{x}_{i-1/2,j}^h}{h^2} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j}^h \Delta K_{2,0}^{hh} - 2\tilde{r}_{i-1,j}^h \Delta K_{1,0}^{hh} + 0,5\tilde{r}_{i-2,j}^h \Delta K_{0,0}^{hh}}{h} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j}^h \Delta K_{2,0}^{hh}}{h_T} \quad 4.75$$

$$i > 1 \quad A_{i,i-1}^j = \frac{\tilde{x}_{i-1/2,j}^h}{h^2} + \frac{1}{4} \frac{\sum \tilde{x}^h}{h^2} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j}^h \Delta K_{1,0}^{hh} - 2\tilde{r}_{i-1,j}^h \Delta K_{0,0}^{hh} + 0,5\tilde{r}_{i-2,j}^h \Delta K_{1,0}^{hh}}{h} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j,w}^h \Delta K_{1,0,w}^{hh}}{h_T} \quad 4.76$$

$$i < n_x - 1 \quad A_{i,i+1}^j = \frac{\tilde{x}_{i+1/2,j}^h}{h^2} + \frac{1}{4} \frac{\sum \tilde{x}^h}{h^2} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j}^h \Delta K_{1,0}^{hh} - 2\tilde{r}_{i-1,j}^h \Delta K_{2,0}^{hh} + 0,5\tilde{r}_{i-2,j}^h \Delta K_{3,0}^{hh}}{h} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j,w}^h \Delta K_{1,0,w}^{hh}}{h_T} \quad 4.77$$

$$i < n_x - 2 \quad A_{i,i+2}^j = -\frac{1}{4} \frac{\tilde{x}_{i+1/2,j}^h}{h^2} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j}^h \Delta K_{1,0}^{hh} - 2\tilde{r}_{i-1,j}^h \Delta K_{2,0}^{hh} + 0,5\tilde{r}_{i-2,j}^h \Delta K_{3,0}^{hh}}{h} - \frac{1,5\tilde{r}_{i,j,w}^h \Delta K_{1,0,w}^{hh}}{h_T} \quad 4.78$$

Nestas equações, o operador  $\Delta K_{k,l}^{hh}$  é dado por:

$$\Delta K_{k,l}^{hh} = K_{k,l}^{hh} - \frac{1}{4} (K_{k-1,l}^{hh} + K_{k+1,l}^{hh} + K_{k,l-1}^{hh} + K_{k,l+1}^{hh}) \quad 4.79$$

Da mesma forma, para a relaxação por Gauss-Sidel, o sistema deve ser resolvido para as atualizações e o valor de pressão atualizado, porém, seguindo a Equação 4.80:

$$\bar{P}_{i,j}^h = \tilde{P}_{i,j}^h + w (d_{i,j}^h - (d_{i-1,j}^h + d_{i+1,j}^h + d_{i,j-1}^h + d_{i,j+1}^h) / 4) \quad 4.80$$

Combinados, os métodos de relaxação por Jacobi e por Gauss-Sidel, formam um modelo suficientemente preciso para a relaxação do sistema de equações gerado para o problema EHD. Desta forma, o domínio será dividido em áreas onde  $x$  é maior que um valor limite, e áreas onde esta constante é menor que este valor limite. Esse procedimento é tomado ponto a ponto quando montando a matriz do sistema para a relaxação em linha. Assim, tem-se:

- Pontos onde  $x > x_{\min}$  usa-se relaxação por Gauss-Sidel;
- Pontos onde  $x < x_{\min}$  usa-se relaxação por Jacobi;



Conforme Nonato e Cavalca (2008), um valor eficiente para  $x_{\min}$  é 0,005; obtido por testes práticos de convergência do algoritmo. Os fatores de relaxação usados devem estar entre os intervalos  $0,2 \leq w_{Jac} \leq 0,6$  e  $0,4 \leq w_{Gaus} \leq 0,8$ .

O esquema de relaxação pode, então, ser descrito como: - Para uma aproximação da pressão  $\tilde{P}^h$  e uma aproximação da espessura do filme  $\tilde{H}^h$  uma nova aproximação é obtida,  $\bar{P}^h$ , construindo para cada linha  $j$  um sistema linear da forma da Equação 4.63, onde os elementos da coluna  $i$  são dados pelas Equações 4.64 ou 4.72, de acordo com a condição do valor de  $x$  ser maior ou menor que o valor limite. O sistema é truncado para um sistema hexa-diagonal e resolvido para os valores de alteração  $d_{i,j}^h$ , que são utilizados para atualizar o valor da pressão de acordo com as Equações 4.62 ou 4.80, também conforme a condição do valor limite.

Nos pontos de alta pressão, ou seja, onde  $x < x_{\min}$ , o problema se aproxima ao problema de advecção. Desta forma, dentro da área de contato, qualquer perturbação na espessura será transportada com o tempo. Este comportamento leva ao já observado fenômeno de ondulações na área de contato, como em Venner (1994) e Venner (1996).

Para finalizar o processo de relaxação das equações discretizadas, deve-se levar em conta a condição de cavitação, que não deve prever pontos de pressão negativa. Se isso ocorrer, alguns pontos ao entorno da zona cavitada ficariam alternando valores cavitados e não durante o processo, diminuindo a convergência. Para corrigir esse erro, quando algum dos pontos na vizinhança do ponto analisado possui valor nulo, somente o valor central é tomado para os cálculos, como se somente para aquele ponto a relaxação passasse a ser pontual e não mais em linha.

A cada passo de relaxação os valores da espessura de filme de óleo devem ser atualizados. Utilizando a discretização proposta, em conjunto com o esquema de aproximação completo, a equação 4.52 se torna:

$$H_{i,j} - H_0 - SX_i^2 - (1-S)Y_j^2 + \sum_{i'} \sum_{j'} K_{i,i',j,j'}^{hh} P_{i',j'}^h = {}_Hf_{i,j}^h \quad 4.81$$

Por fim, a equação de movimento deve ser considerada. Após um certo número de relaxações na malha, a constante  $H_0$  da equação de espessura de filme deve ser atualizada como:

$$\bar{H}_0 = \tilde{H}_0 + w_{Ho} \left( F_{din} - \left( \tilde{H}_0 + Eh^2 \frac{3}{2p} \sum_i \sum_j P_{i,j}^h \right) \right) \quad 4.82$$

Onde  $w_{Ho}$  é uma constante pequena de relaxação. Esta expressão é válida para uma única malha, porém para o algoritmo completo Multi-grid, seu valor é avaliado utilizando o esquema de aproximação completo (FAS), atualizando o resíduo transportado.

Com o modelo descrito acima, acrescido da lógica de operação entre níveis do modelo Multi-Níveis, um algoritmo para o cálculo das características do filme de lubrificante no contato EHD pode ser desenvolvido. No próximo capítulo, as aplicações deste algoritmo transiente a casos específicos de contato, assim como sua aplicação na caracterização dinâmica do contato são apresentados e discutidos.

## **Capítulo 5**

### **Resultados e Discussões**

O modelo descrito nos capítulos anteriores pode agora ser aplicado a casos de contato EHD. Tanto seu comportamento estático, no contato elíptico, quanto o comportamento transiente do contato, devem ser observados.

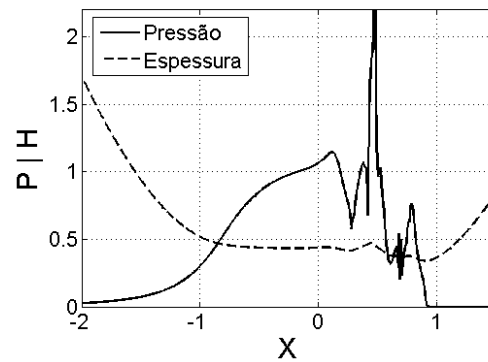
Neste capítulo, serão apresentados os primeiros resultados para o contato elíptico numa variação do algoritmo apresentado em Nonato (2008). Deste mesmo equacionamento, derivam-se ainda dois algoritmos para análise temporal do contato. O primeiro sendo uma adaptação para o carregamento harmônico sem a influência da inércia, como a utilizada por Wijnant (1998) para obter os parâmetros dinâmicos do contato.

A segunda aplicação é o equacionamento transiente completo, que contempla as influências da inércia no contato aplicado ao caso das vibrações livres. As respostas deste modelo serão então avaliadas para obtenção das características dinâmicas do contato, através de um ajuste não linear das forças.

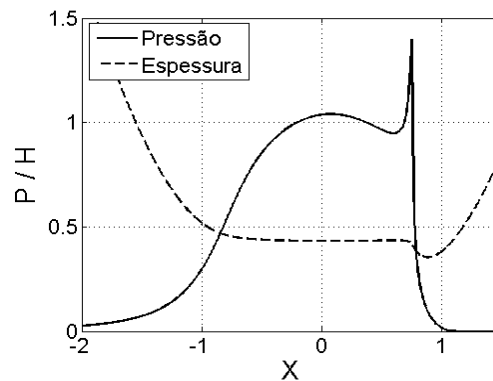
### **Contato Elíptico**

Utilizando-se como base o algoritmo descrito em Nonato e Cavalca (2008) para o contato circular, o contato EHD elíptico foi implementado utilizando o modelo matemático descrito para o caso estático no capítulo anterior. Poucas variações à lógica do algoritmo base foram introduzidas, além do novo tratamento da fronteira de relaxação.

Este novo modelo, como descrito anteriormente, possui uma fronteira fixa entre os métodos de relaxação, tomando como base um valor mínimo de  $x$ . Porém, o algoritmo anterior se baseava na fronteira corrigida pela espessura da malha, como em Venner (2000). Desta forma o valor mínimo era o da razão  $x/h^2$ . Em seu trabalho, Nonato e Cavalca (1998) foi avaliado o comportamento da convergência global do equacionamento em malhas muito finas. Esta claro, pelos perfis de pressão e espessuras a seguir, obtidos deste trabalho, que os pontos onde a pressão é alta, em malhas muito finas, são pouco representados, e o processo de relaxação é prejudicado.



a)



b)

Figura 5.1 –Perfis de pressão e espessura de filme para caso de baixa carga em malha de 1024x1024 pontos, a) com fronteira de relaxação variável e b) fronteira fixa, (Nonato e Cavalca, 2008);

Notou-se que, para malhas acima de 512x512 pontos, o fator  $1/h^2$  faz com que a razão  $x/h^2$  se torne muito pequena, excluindo pontos de alta pressão da relaxação por Jacobi. Com isso, a convergência é prejudicada ou até mesmo não atingida.

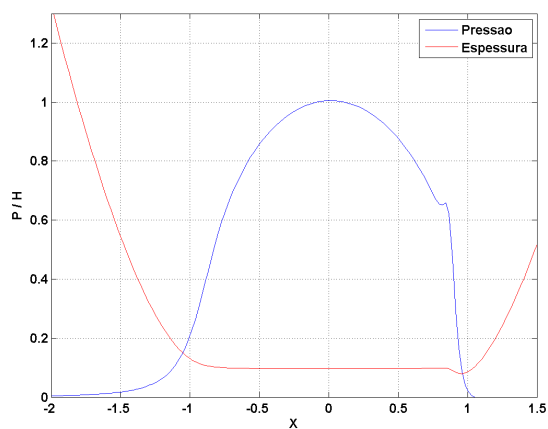
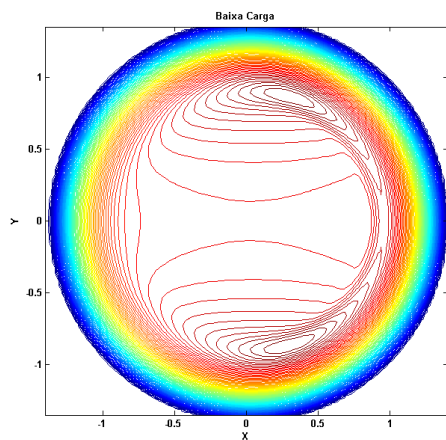
Os primeiros resultados para o equacionamento elíptico foram obtidos analisando os casos de contato simples como propostos em vários trabalhos, Wijnant (1998), Nijenbanning (1994) e Goodyer (2001). Três foram os casos analisados, assim como para o caso circular. Os casos estão descritos na Tabela 5.1. Para os três casos de carregamento foram utilizados 3 valores de elipsidade,  $k = 1,0; 0,5$  e  $0,1$ . Os gráficos dos contornos de espessura, assim como a distribuição de pressão e espessura na linha central do contato se encontram na seqüência. Em todas as simulações foram usadas malhas de até 512x512 pontos, sendo esta a malha objetivo.

Tabela 5.1 – Parâmetros para os casos de alta, média e baixa carga elípticos;

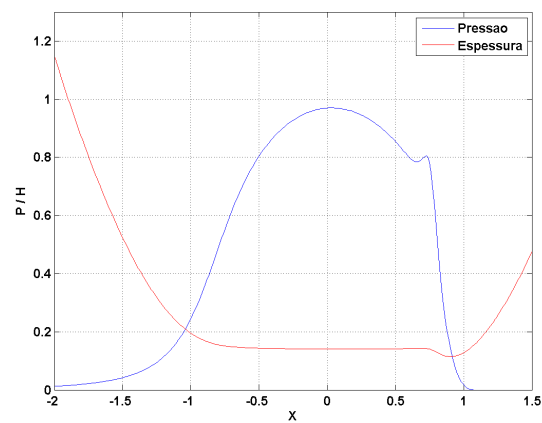
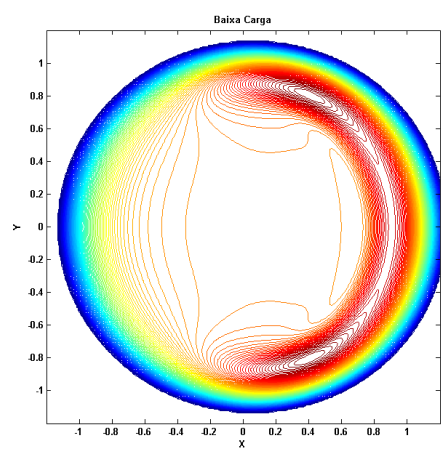
<b>Parâmetro</b>	<b>Caso 1 Baixa Carga</b>	<b>Caso 2 Media Carga</b>	<b>Caso 3 Alta Carga</b>
$M$	100	500	1000
$L$	5	5	5

É interessante notar como a distribuição de pressão e espessura de filme se alteram com a variação da elipsidade. Conforme descrito em Wijnant (1998), com a diminuição drástica da elipsidade, chegando a valores de  $0,1$ , para casos de baixa carga, tais distribuições desviam-se completamente dos perfis esperados. O pico de *Petrushev* desaparece e a solução se distancia da distribuição parabolóide de Hertz para a pressão.

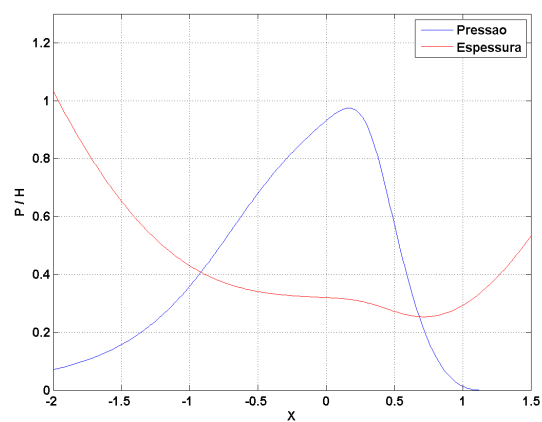
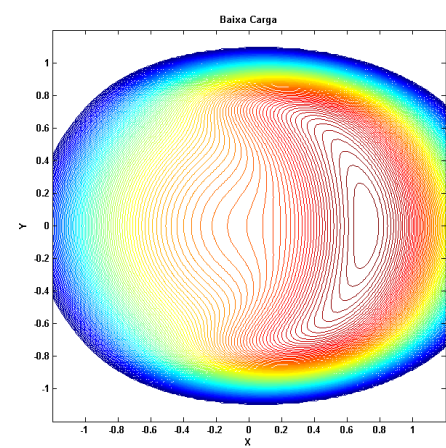
Para o caso de média e alta carga, observa-se um crescimento no pico de pressão e a simetria dos contornos de espessura começa a sumir, dando lugar a uma dominância em  $X$ . Numericamente, tal comportamento deve-se ao próprio fator  $k$  na equação de Reynolds. Fisicamente, a diminuição da elipsidade, mantendo-se os outros parâmetros constantes, implica em um aumento da área total de contato, pois a dimensão  $a$  se mantém inalterada, aumentando a elipse de contato na direção  $Y$ .



a)

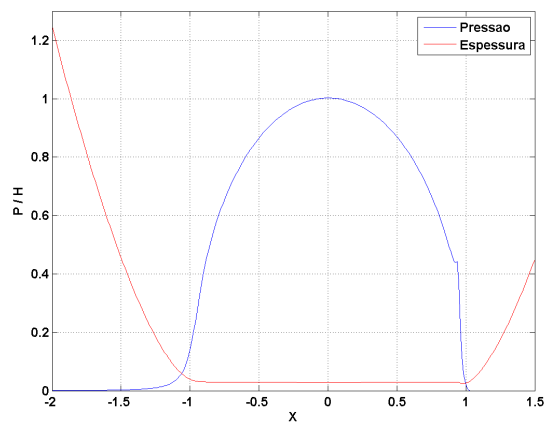
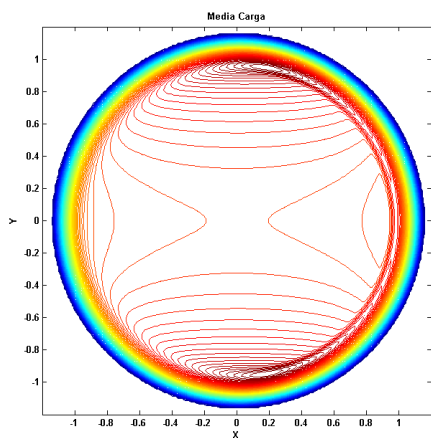


b)

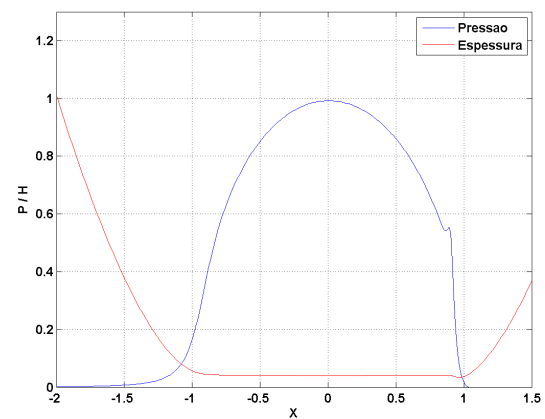
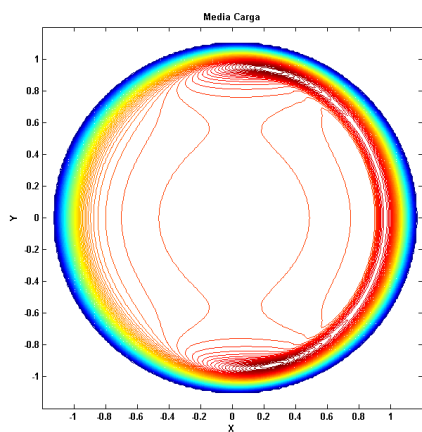


c)

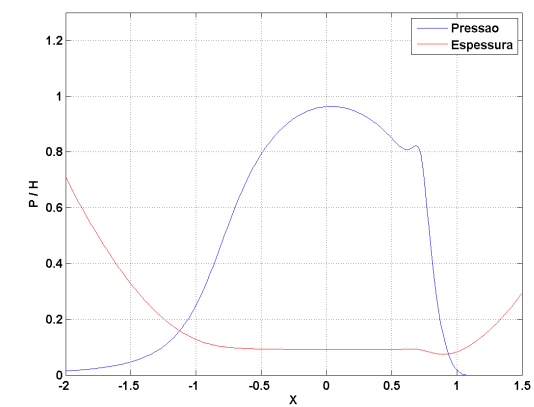
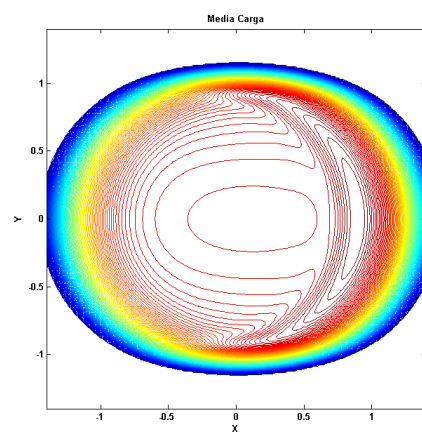
Figura 5.2 – Gráficos de contorno espessura e distribuição pressão para o caso de Baixa Carga com elipsidades a) 1,0 b) 0,5 e c) 0,1



a)

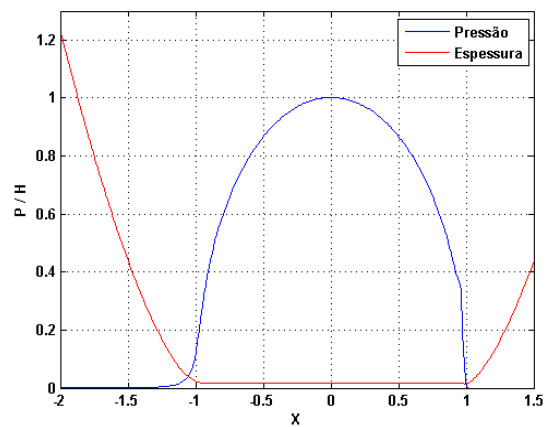
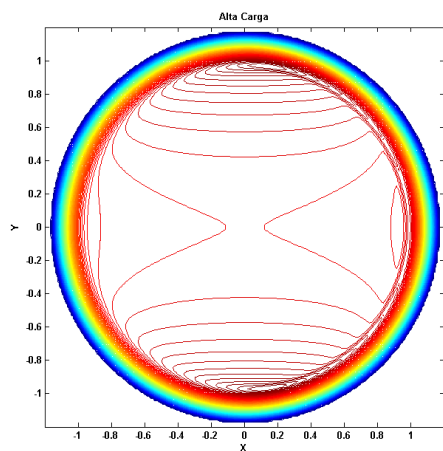


b)

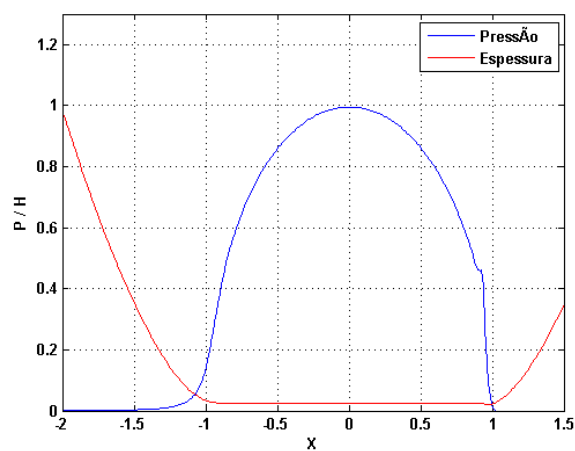
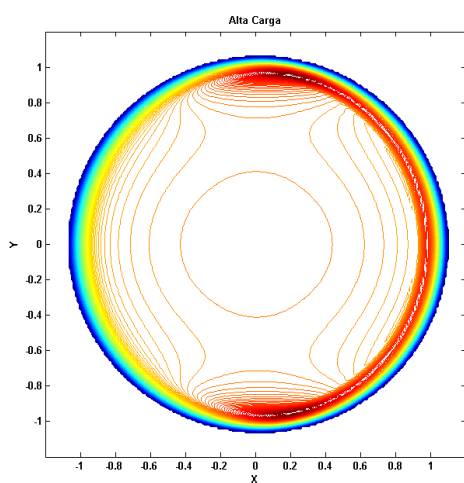


c)

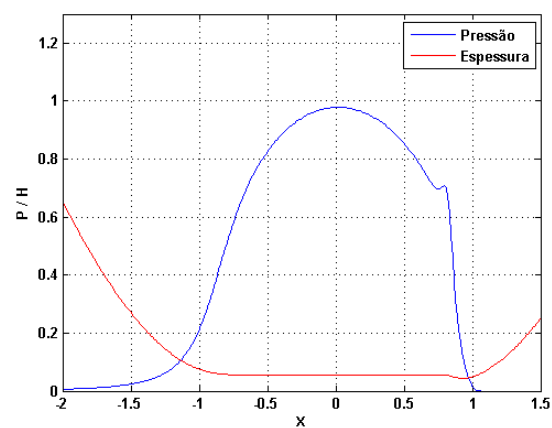
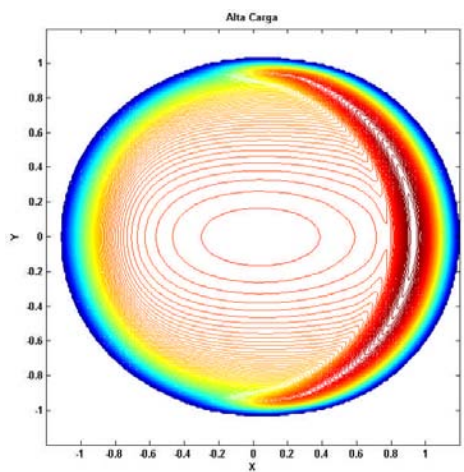
Figura 5.3 – Gráficos de contorno espessura e distribuição pressão para o caso de Média Carga com elipsidades a) 1,0 b) 0,5 e c) 0,1



a)



b)



c)

Figura 5.4 – Gráficos de contorno espessura e distribuição pressão para o caso de Alta Carga com elipsidades a) 1,0 b) 0,5 e c) 0,1



Desta maneira, com a diminuição da elipsidade, a distribuição se torna mais próxima a solução de baixa carga. Para ambos os casos, com elipsidade menor que  $1,0$ , devido à dominância da dinâmica do filme em  $X$ , o pico de pressão se desloca das laterais do contato para o centro da saída do filme, devido claramente a menor influência dos termos diferenciais em  $Y$ .

Para efeito de comparação, as aproximações dos corpos em contatos estão listadas na Tabela 5.2, juntamente aos valores ajustados de referência,  $H_0^*$ . Estes valores foram obtidos utilizando a equação proposta por Wijnan (1998) para a aproximação dos corpos em função dos parâmetros do contato. Este ajuste será apresentado na Equação 5.3.

Tabela 5.2 – Valores de aproximação dos corpos em carregamento estático para os casos de Baixa, Média e Alta carga;

<b>Baixa Carga</b>	$H_0$	$H_0^*$
k = 1,0	0,8980	0,9033
k = 0,5	0,8288	0,8522
k = 0,1	0,5757	0,5830
<b>Média Carga</b>	$H_0$	$H_0^*$
k = 1,0	0,9715	0,9738
k = 0,5	0,9524	0,9600
k = 0,1	0,8772	0,8872
<b>Alta Carga</b>	$H_0$	$H_0^*$
k = 1,0	0,9838	0,9851
k = 0,5	0,9728	0,9772
k = 0,1	0,9290	0,9357

Os valores observados possuíram uma correlação suficiente com o valor ajustado por Wijnant (1998). Esta tendência pode ser vista também nos valores ajustados da Figura 5.9. Desta forma, a expressão de ajuste de Wijnant pode ser utilizada como chute inicial para o valor de  $H_0$ .

Outro fato importante a ser observado é a convergência do algoritmo. A Tabela 5.3 mostra, para os mesmos casos, os valores do resíduo geral da pressão  $r_n$  e o resíduo do balanço de força, conforme a Equação 4.56. O resíduo da pressão é calculado pela média absoluta das diferenças dos valores em cada ponto da malha para pressão, entre os passos de relaxação.

Um dos problemas encontrados por Goodyer (2001) em seu algoritmo Multi-Níveis, onde, apesar da convergência do resíduo da pressão em um nível satisfatório, mas a contemplando uma convergência ilusória do balanço de força, não foi observado aqui. Em seu caso, Goodyer atesta que a operação com um valor de aproximação para todas as malhas pode atrapalhar na convergência do balanço de força, fazendo com que a somatória de pressão adimensional seja diferente de  $2p/3$ . Na tabela 5.3 observam-se valores de desvio do somatório de pressão da ordem de grandeza de  $10^{-10}$ , muito abaixo do próprio resíduo geral da pressão.

Tabela 5.3 – Valores de aproximação dos corpos em carregamento estático para os casos de Baixa, Média e Alta carga;

<b>Baixa Carga</b>	$r_n$	<b>Balanço de Força</b>
k = 1,0	3,3510E-05	2,1620E-07
k = 0,5	7,7600E-06	9,6970E-08
k = 0,1	6,9110E-06	9,6850E-10
<b>Média Carga</b>	$r_n$	<b>Balanço de Força</b>
k = 1,0	9,5730E-06	6,9490E-10
k = 0,5	4,8200E-06	1,6660E-09
k = 0,1	6,7570E-06	2,9260E-08
<b>Alta Carga</b>	$r_n$	<b>Balanço de Força</b>
k = 1,0	7,63E-06	1,0660E-06
k = 0,5	7,35E-06	2,4170E-06
k = 0,1	9,46E-06	1,1720E-05

Porém, é interessante notar que, dentre os níveis, o valor de  $H_0$  realmente varia, pois o valor da pressão em um nível menos refinado é uma aproximação mais grosseira da distribuição na malha alvo do algoritmo. Esse comportamento se deve a convergência de segunda ordem do algoritmo, que pode ser ilustrada pela Tabela 5.4.

Como também observado em Wijnant (1998), a quarta coluna da Tabela 5.4 mostra a razão entre as diferenças das aproximações em três níveis consecutivos,  $h$ ,  $h-1$  e  $h-2$ . A redução nesta razão é de aproximadamente  $1/4$  a cada redução da malha pela metade, confirmando a convergência de segunda ordem.

De posse do algoritmo funcional para análise do contato EHD elíptico, alguns casos de mancais de elementos rolantes podem ser analisados. Como exemplo será utilizado um mancal

radial de esferas FAG 6005, similar a construção mostrada na Figura 1.1. Deste mancal, os contatos mais solicitados serão analisados pelo algoritmo. A Tabela 5.5 traz alguns dados necessários para a caracterização do mesmo.

Tabela 5.4 – Teste de convergência de segunda ordem para o caso de Baixa Carga  $k = 1,0$ ;

<b>Malha</b>	$H_0$	$H_0^h - H_0^{h-1}$	$\frac{H_0^h - H_0^{h-1}}{H_0^{h-1} - H_0^{h-2}}$
<b>32x32</b>	0,943788	-	-
<b>64x64</b>	0,909481	-0,034307	-
<b>128x128</b>	0,900278	-0,009203	0,268
<b>256x256</b>	0,897995	-0,002283	0,248
<b>512x512</b>	0,897423	-0,000572	0,250

Tabela 5.5 – Dados para avaliação do contato EHD do mancal FAG 6005;

<b>Mancal FAG 6005</b>			
$D_m$	<b>Diâmetro primitivo</b>	36,00	[mm]
	<b>Osculação</b>	104,00	[%]
$D$	<b>Diâmetro do elemento</b>	6,35	[mm]
$Z_e$	<b>Número de Elementos</b>	10	[-]
$f$	<b>Carga Radial</b>	1500	[N]
$n_i$	<b>Rotação Anel Interno</b>	2000	[RPM]
$n_o$	<b>Rotação Anel Externo</b>	0	[RPM]
$a$	<b>Índice Pressão-Viscosidade</b>	$2,2 \times 10^{-8}$	[N <sup>-1</sup> m <sup>2</sup> ]
$h_0$	<b>Viscosidade a P. Ambiente</b>	$40,0 \times 10^{-3}$	[Nm <sup>-2</sup> s]

Como os valores para as reais propriedades do fluido aplicado na lubrificação do mancal não eram disponíveis, foi utilizado o mesmo fluido de características amplas empregado em outros trabalhos. Para o mancal, foi assumida uma condição de folga zero, o que implica em um carregamento distribuído a 180° da extensão circunferencial do mancal. Desta forma, o elemento mais carregado se encontra exatamente alinhado com a carga radial e outros dois elementos de cada lado recebem também parte da carga, isto é, 90° no sentido horário e 90° no sentido anti-horário.

Com uma adaptação do modelo implementado por Vischi (2008), tanto a distribuição de carga nos contatos do mancal, quanto seus respectivos parâmetros EHD, foram calculados. A Tabela 5.6 lista esta distribuição por elemento.

Devido à ação da resultante centrípeta do carregamento se dar apenas no contato externo, ocorrem valores de carregamento não nulos para os elementos entre 108° e 252°. Tais valores são desconsiderados para o contato interno gerando valores nulos do parâmetro  $M$ . Para efeitos de comparação, os parâmetros do contato, como o semi-eixo menor, a pressão máxima de Hertz e a aproximação dimensional segundo Hertz, estão listados na Tabela 5.7.

Tabela 5.6 – Distribuição de carregamento e parâmetros EHD em um mancal FAG 6005;

Elemento [°]	Carga [N]	M (Pista Interna)	L (Pista Interna)	M (Pista Externa)	L (Pista Externa)
0	0,6557E+03	0,9912E+04	0,1175E+02	0,1337E+05	0,8385E+01
36	0,4771E+03	0,7213E+04	0,1175E+02	0,9733E+04	0,8385E+01
72	0,1127E+03	0,1703E+04	0,1175E+02	0,2300E+04	0,8385E+01
108	0,1402E+00	0,0000E+00	0,1175E+02	0,2860E+01	0,8385E+01
144	0,1402E+00	0,0000E+00	0,1175E+02	0,2860E+01	0,8385E+01
180	0,1402E+00	0,0000E+00	0,1175E+02	0,2860E+01	0,8385E+01
216	0,1402E+00	0,0000E+00	0,1175E+02	0,2860E+01	0,8385E+01
252	0,1402E+00	0,0000E+00	0,1175E+02	0,2860E+01	0,8385E+01
288	0,1127E+03	0,1703E+04	0,1175E+02	0,2300E+04	0,8385E+01
324	0,4771E+03	0,7213E+04	0,1175E+02	0,9733E+04	0,8385E+01

Tabela 5.7 – Distribuição de carregamento e parâmetros EHD em um mancal FAG 6005;

Elemento [°]	$a_i$ [m]	$a_o$ [m]	$P_{hi}$ [Pa]	$P_{ho}$ [Pa]	$c$ [m]
0	0,1158E-03	0,1400E-03	0,2550E+10	0,2169E+10	0,1843E-04
36	0,1041E-03	0,1259E-03	0,2294E+10	0,1951E+10	0,1491E-04
72	0,6436E-04	0,7783E-04	0,1418E+10	0,1206E+10	0,5697E-05
108	0,0000E+00	0,8369E-05	-	0,1297E+09	0,3240E-07
144	0,0000E+00	0,8369E-05	-	0,1297E+09	0,3240E-07
180	0,0000E+00	0,8369E-05	-	0,1297E+09	0,3240E-07
216	0,0000E+00	0,8369E-05	-	0,1297E+09	0,3240E-07
252	0,0000E+00	0,8369E-05	-	0,1297E+09	0,3240E-07
288	0,6436E-04	0,7783E-04	0,1418E+10	0,1206E+10	0,5697E-05
324	0,1041E-03	0,1259E-03	0,2294E+10	0,1951E+10	0,1491E-04

Tendo definido tais parâmetros, é possível simular o contato EHD para o mancal de elementos rolantes. Devido às variações extremas dos parâmetros do contato dentro do mancal, dois casos serão observados. Estes casos serão o contato elemento-pista interna e elemento-pista externa na posição 0°, representando, desta forma, os casos de extrema carga no mancal. Devido a característica de maior carregamento, esses são os casos de maior custo computacional, pois a variação dos parâmetros da equação de Reynolds se torna ainda mais significativa.

Utilizando os valores de entrada fornecidos como nas tabelas anteriores, foi simulado primeiramente o contato com a pista interna. Este contato pode ser caracterizado por:  $M = 9912$ ,  $L = 11,75$  e  $k = 0,1092$ . A função ajuste para a aproximação dos corpos resulta para esses valores em  $H_0^* = 0,9897$  e o valor retornado pelo algoritmo foi  $H_0 = 0,9848$ . A Figura 5.5 mostra a distribuição de pressão no contato, assim como os contornos de espessura para este caso.

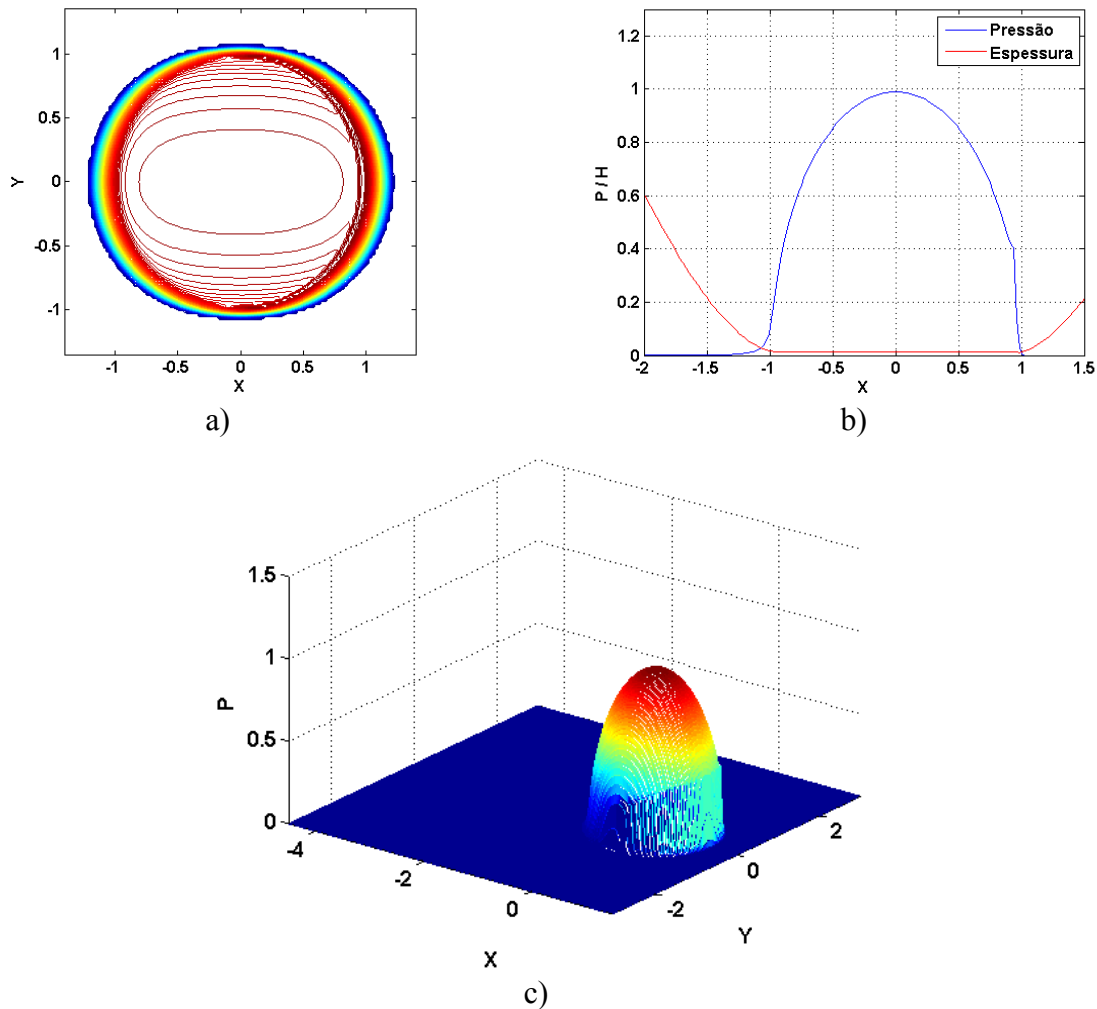


Figura 5.5 – a) Contornos de Espessura, b) Perfil de pressão e espessura na linha central do contato e c) Distribuição de pressão no domínio para contato Elemento-Pista Interna

Deve-se notar que, devido à alta carga no contato, a distribuição de pressão se assemelha muito a distribuição de pressão parabolóide de Hertz, sendo que o pico de Petrushev

praticamente desaparece. Porém, sua influencia no filme continua sendo notada na Figura 5.5 a), onde percebe-se um constrição na saída do escoamento. Observa-se também que a pressão máxima ocorre muito próxima a  $(X, Y) = (0, 0)$ , ou seja, o centro do contato, como esperado.

O mesmo comportamento foi observado para o contato com a pista externa, onde  $k = 0,1357$ , porém com maior evidencia da alta carga, com pico de pressão bem menos perceptível. Neste caso, o valor de aproximação dos corpos, avaliado pelo algoritmo, foi  $H_0 = 0,9915$  contra  $H_0^* = 0,9942$  (ajustado). Os resultados gráficos se encontram na Figura 5.6.

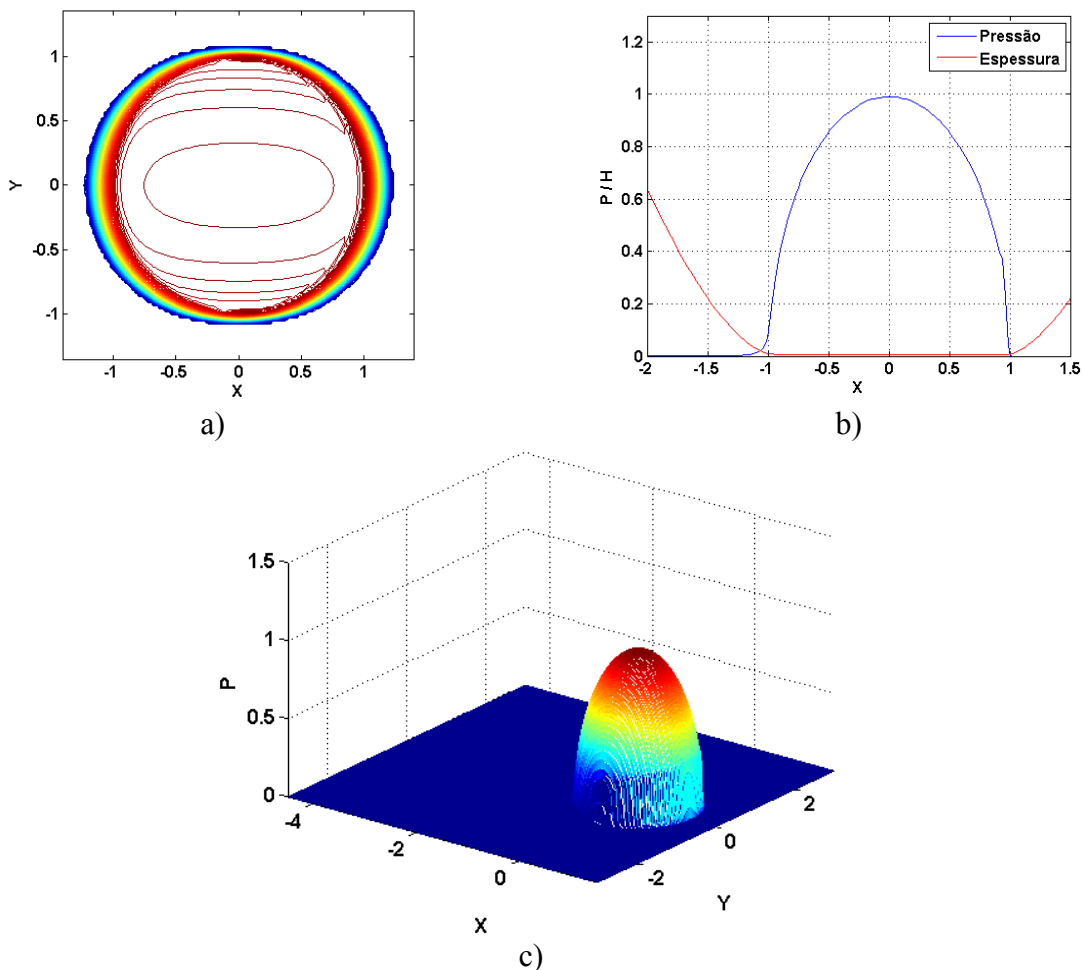


Figura 5.6 – a) Contornos de Espessura, b) Perfil de pressão e espessura na linha central do contato e c) Distribuição de pressão no domínio para contato Elemento-Pista Externa

## Carregamento Harmônico

O algoritmo para análise do carregamento harmônico, como feito por Wijnant (1998) e por Goodyer (2001) difere do algoritmo para contato elíptico em duas maneiras. A primeira, mais evidente, é a introdução da coordenada temporal, que leva, principalmente, ao aumento do tempo computacional, pois a cada passo o contato deve ser calculado inteiramente.

Desta forma, a primeira alteração é a repetição do cálculo estático para passos de tempo como estipulado anteriormente, já contemplando o efeito de propagação, como previsto pela análise do termo de *Squeeze* dentro da área de contato.

Como a análise de Wijnant (1998) propõe, a análise harmônica para um carregamento senoidal é procedida de forma quasi-estática. Assim, a derivada de segunda ordem na equação de movimento é feita zero e, desta maneira, a cada passo de iteração deve ocorrer uma adaptação rápida do filme a condição imposta de carga, sendo as acelerações dos corpos desprezíveis. A condição descrita deve valer para casos onde a frequência de vibração não ultrapasse em muito a velocidade dos corpos em rotação.

Desta maneira, a equação de movimento em sua forma não dimensional se torna:

$$\frac{3}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(X, Y) dXdY = 1 + A_h \sin(\Omega_e T) \quad 5.1$$

Utilizando, então, um contato geral de características  $M = 200$ ,  $L = 10$ ,  $k = 0,5$ , foi obtido o comportamento da aproximação entre os corpos,  $H_0(T)$ , em função do tempo. A resposta harmônica do contato para duas frequências de excitação diferentes,  $\Omega_e = 2p$  e  $\Omega_e = 4p$  está representada na Figura 5.7.

Como esperado, a resposta do contato também se comporta de forma harmônica. É interessante observar um fenômeno comum no contato EHD, já observado anteriormente, tanto experimentalmente quanto numericamente, a ondulação do filme.

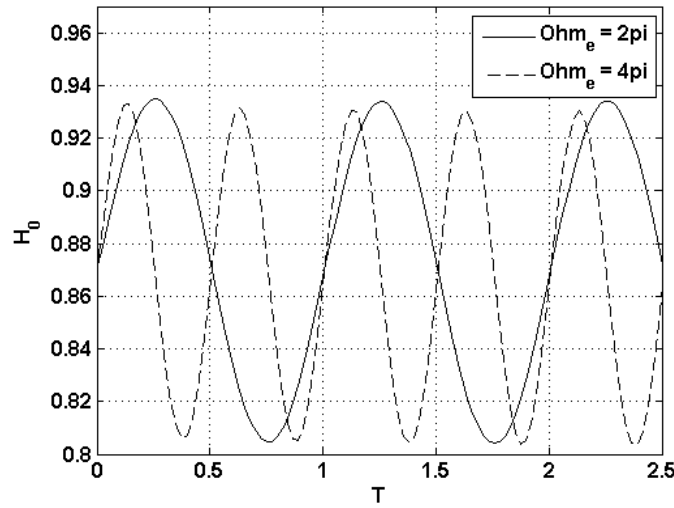


Figura 5.7 – Resposta harmônica do contato para duas frequências de excitação;

Devido às características de transporte da equação de Advecção, sendo esta uma aproximação para a equação de Reynolds quando a pressão é muito alta, qualquer perturbação do filme de óleo dentro do contato irá se propagar pelo contato com a velocidade adimensional de uma unidade de comprimento por uma unidade de tempo, ou seja, a velocidade do filme. Olhando mais de perto esta condição, pode-se observar que Reynolds torna-se, então:

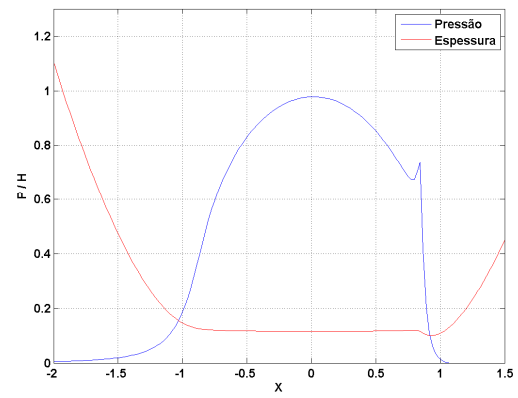
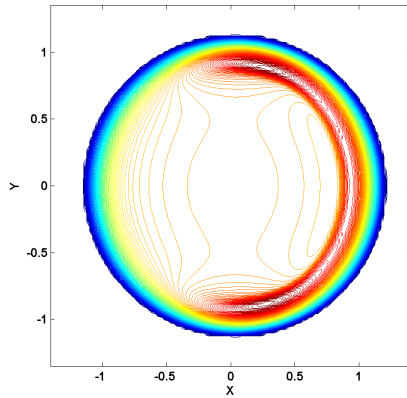
$$\frac{\partial(\bar{\Gamma}H)}{\partial X} + \frac{\partial(\bar{\Gamma}H)}{\partial T} = 0 \quad 5.2$$

Uma possível solução para a mesma, sendo a densidade relativa limitada, é  $H \approx H(X - T)$ , que se comporta como um deslocamento da função espessura de  $T$  na direção  $X$ . Como as elevadas densidade e viscosidade do centro do contato impedem que a espessura se altere muito com a aproximação dos corpos, quando o carregamento harmônico imprime uma força maior que a do equilíbrio, somente as bordas do contato serão afetadas.

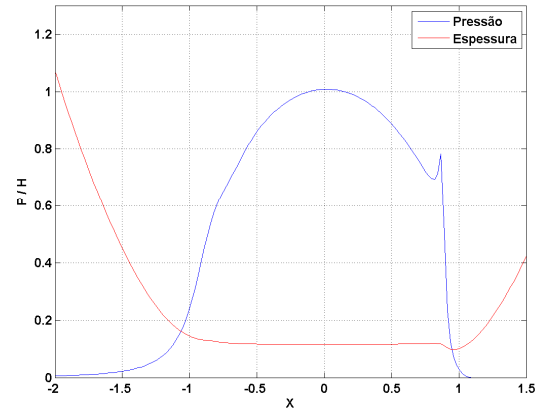
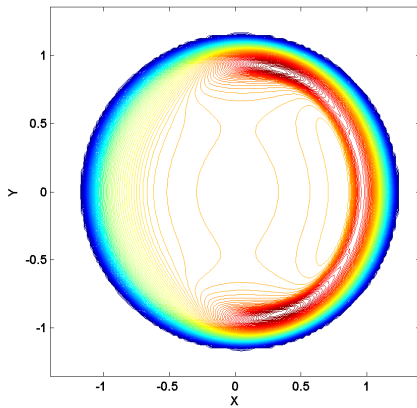
As variações de espessura da borda serão transportadas pelo contato, como observado anteriormente em Venner e Ludbrecht (1996) e discutido em Wijman (1998). A Figura 5.8 mostra esse efeito sob a pressão e a espessura de filme. Partindo do tempo zero até 1,25, com passos de 0,25, as figuras demonstram a evolução das ondulações pelo contato. Do lado esquerdo estão os



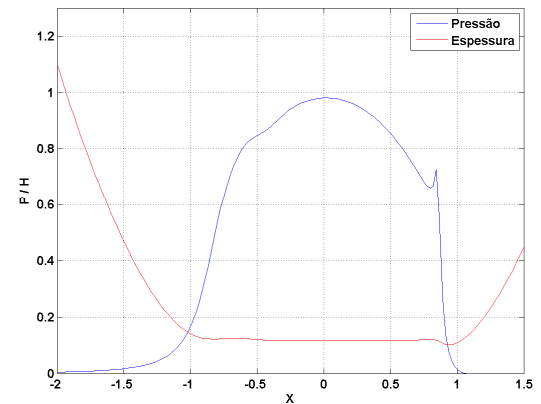
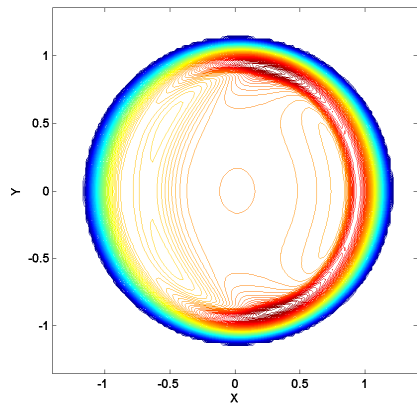
contornos de espessura e, do direito, o perfil de pressão e espessura. É importante notar que por volta do tempo 1,0 as primeiras ondulações introduzidas na entrada do contato chegam ao centro do contato, confirmando a velocidade adimensional.



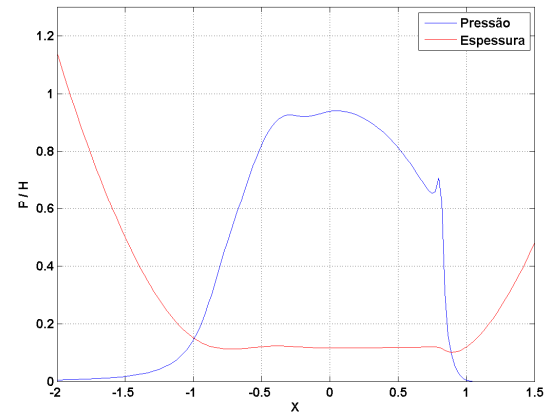
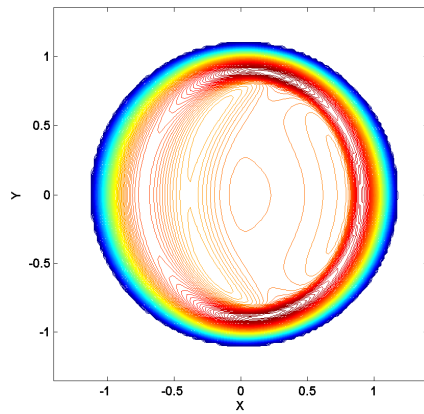
$T=0,0$



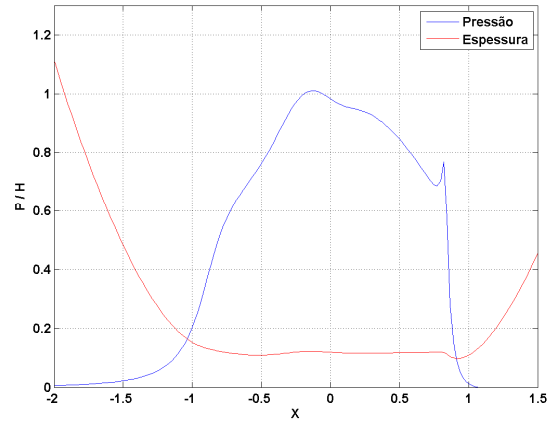
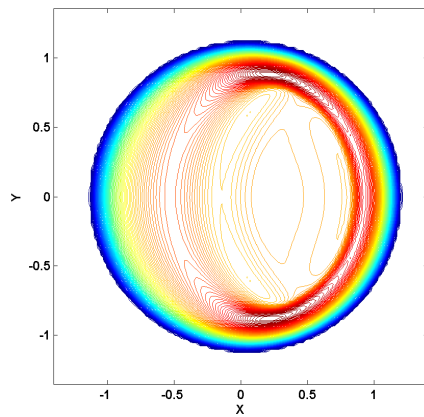
$T=0,25$



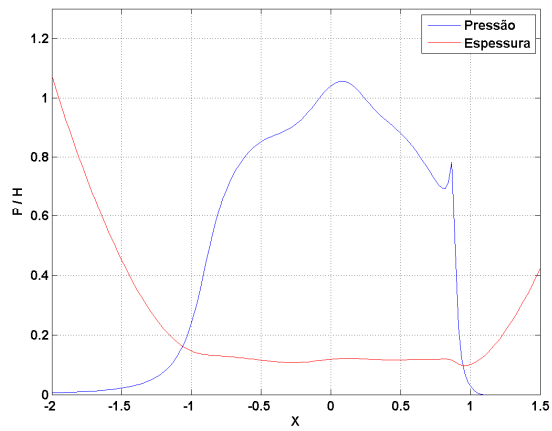
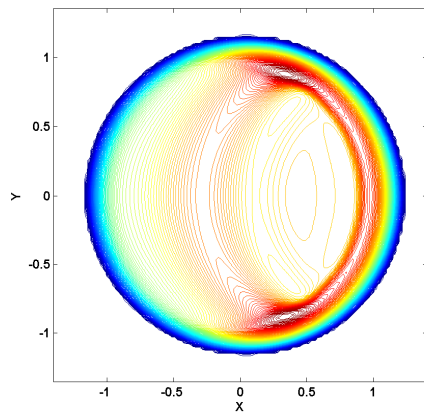
$T=0,5$



T=0,75



T=1,0



T=1,25

Figura 5.8 – Representação das ondulações na espessura de filme e pressão para instantes de tempo  $T=0,0$  a  $T=1,25$ , ( $M = 200$ ,  $L = 10$ ,  $k = 0,5$  e  $\Omega_e = 2\pi$ );

Assim, a espessura de filme central deve se alterar somente a partir de  $T=1,0$ , devido a velocidade de propagação da onda. Até este instante, seu valor deve ser pouco alterado pela movimentação total do filme, isto é pela aproximação dos corpos. Este comportamento está ilustrado na Figura 5.9.

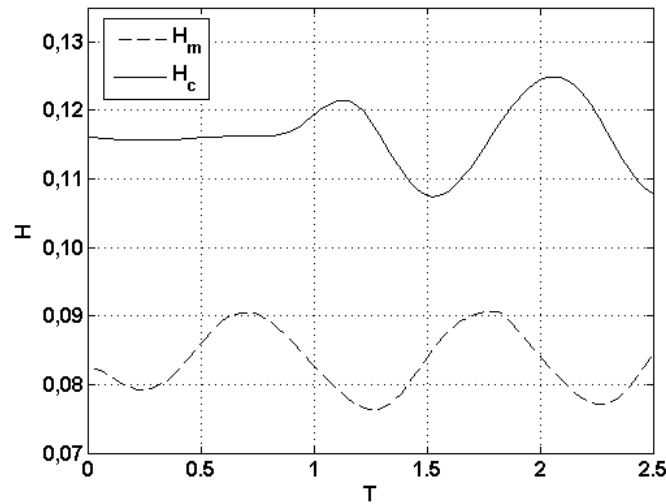


Figura 5.9 – Comportamento da espessura mínima,  $H_m$ , e espessura central,  $H_c$ , do filme para o caso  $M = 200$ ,  $L = 10$ ,  $k = 0,5$  e  $\Omega_e = 2\pi$  ;

Antes da entrada da primeira oscilação, a espessura central,  $H_c$ , varia muito pouco, porém a espessura mínima já começa a variar devido ao posicionamento na fronteira posterior do contato. Outro efeito interessante é a forma da curva, que tende a um dente de serra. Este diferente comportamento se deve ao fato da espessura mínima não ocorrer em um ponto específico, mas sim, movendo-se pela borda de saída e é principalmente afetada a partir de  $T=0,5$ .

Todos estes comportamentos serão, mais uma vez, observados para o caso de vibrações livres. Uma descrição mais aprofundada, tanto nas condições de convergência como no comportamento geral do contato, presente em Wijnant(1998).

Das respostas em carregamento harmônico, Wijnant obtém, através de um procedimento de ajuste, os coeficientes dinâmicos do filme. Até o presente momento é de nosso conhecimento apenas este trabalho versando sobre a caracterização dinâmica do contato elíptico. Sua abordagem, que já assume a linearidade da resposta, se baseia na obtenção de uma rigidez diretamente da resposta estática do equacionamento. Assim, é importante obter uma correlação da aproximação dos corpos com o carregamento imposto. Para uma ampla gama de valores de  $M$  e  $L$ , Wijnant (1998) apresenta um gráfico desta correlação e ajusta uma função para o caso, reproduzido parcialmente na Figura 5.10.

Na Figura 5.10 os pontos representados por pequenos quadrados foram obtidos pelo algoritmo implementado nesta dissertação. Já as linhas tracejadas foram obtidas utilizando a relação ajustada de Wijnant, dada pela Equação 5.3

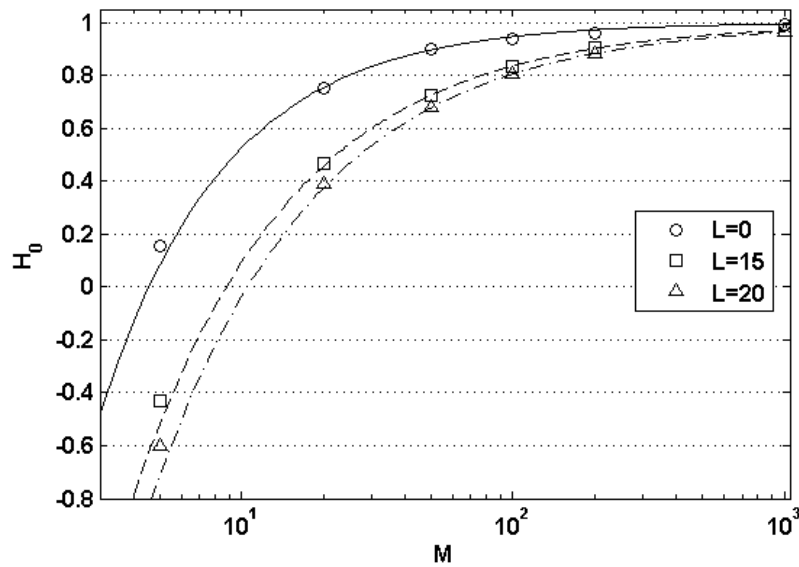


Figura 5.10 – Ajuste da aproximação dos corpos,  $H_0$ , em função de  $M$  e  $L$ ;

$$H_0 = 1 - p(L)M^{q(L)}, \text{ onde:}$$

$$p(L) = \left( (4 - 0.2L)^7 + (3.5 + 0.1L)^7 \right)^{1/7} \quad 5.3$$

$$q(L) = -\left( 0.6 + 0.6(L + 3)^{-1/2} \right)$$

Esta mesma equação adequa-se ao caso elíptico, onde um fator multiplicador do adimensional de carga deve ser usado. Como mostrado em Wijnant (1998), a razão das somatórias parciais de curvatura pode ser aplicada, substituindo  $M$  por  $(R_x / R_y)^{1/2} M$ .

Para obtenção do amortecimento viscoso, Wijnant faz a correlação da força no contato com a posição obtida pela integração numérica. Quando está presente um amortecimento, o gráfico de tal função é uma elipse de eixo maior alinhado com a reta da rigidez do contato e a área descrita por essa elipse é proporcional a energia despendida com o amortecimento viscoso.

O modelo adotado por Wijnant (1998) condiz perfeitamente com as hipóteses adotadas, porém não ficam claros alguns procedimentos adotados em seu trabalho. Como exemplo, em um trabalho posterior de Wijnant e Wensing(1999) é apresentada uma nova forma da equação de movimento, já com a influência do amortecimento, porém a rigidez é obtida através da própria equação de ajuste estático, como na Equação 5.3, de forma implícita, pois  $M$  é função do carregamento.

Assim, julgou-se adequado utilizar uma relação mais direta para o ajuste. Com uma técnica não linear, comumente aplicada a mancais hidrodinâmicos, presente em Zhao (2005), Zhou (2004) e Castro (2009), a força no contato é ajustada como um todo às constantes dinâmicas. Para poder apreciar melhor a influência da inércia esta técnica será aplicada ao caso de vibrações livres e apresentada na próxima seção.

## ***Vibração Livre***

Utilizando o integrador tipo Newmark- $\beta$  para trabalhar com a equação de movimento, como apresentado no Capítulo 4, a resposta do sistema em contato pode ser obtida para o caso das vibrações livres. Para a obtenção da resposta, uma condição inicial deve ser imposta, de posição ou velocidade, que incite o movimento do sistema.

Optou-se pela utilização de uma condição inicial de posição, pois é de mais fácil interpretação física, além de mais simples implementação. Como observado anteriormente, a

presença de elipsidade tem o comportamento apenas de diminuir o carregamento sob a área de contato, além de desacoplar as direções da equação de Reynolds. Assim, na maioria dos casos estudados foi empregado a elipsidade 1,0.

De modo a confirmar o comportamento transiente da resposta a vibração livre um caso de contato geral foi simulado. Apresentando um carregamento mediano, aliado a uma elipsidade de  $k = 0,5$ , o caso analisado foi:  $M = 200$ ,  $L = 10$  e  $\Omega_n = 10,26$ . O gráfico da Figura 5.11 apresenta tanto a resposta transiente do contato, como o comportamento das espessuras mínima e central do filme.

Como previsto, tanto espessura mínima quanto central apresentam um comportamento distinto até atingirem regime ao entorno de  $T=1,0$ , sendo que ocorre na espessura central o mesmo que no carregamento harmônico, fato que pode ser visto na Figura 5.12. O deslocamento tende, então, para o valor de equilíbrio estático, que neste caso é  $H_0 = 0,8710$ . A função de ajuste de Wijnant prevê, para este caso,  $H_0^* = 0,8841$ .

Para validar os resultados do equacionamento transiente, alguns casos específicos de contato foram analisados para confirmar alguns pontos observados por Wijnant (1998). Primeiramente, como Wijnant descreve em seu trabalho, o período de oscilação no caso EHD transiente é diretamente ligado à frequência adimensional do contato seco. Se para o caso da oscilação do contato seco o período é de 5,13, no caso da lubrificação EHD, com a adimensionalização prevista no Capítulo 4, o período será  $T_n = 5,13/\Omega_n$ .

Este comportamento pode ser observado tanto na Figura 5.11 a), onde o período esperado é de  $T_n = 1/2$ , assim como na Figura 5.13, onde são observadas três respostas transientes para o caso  $M = 100$ ,  $L = 15$  e  $k = 1,0$ , com as frequências adimensionais  $\Omega_n = 2,56$ , 5,13 e 10,26. Neste caso, os respectivos períodos de oscilação são  $T_n = 2$ , 1 e  $1/2$ . A variação de frequências adimensionais pode ser obtida, fisicamente, através da variação da massa do elemento rolante, sem influenciar as condições de contato.

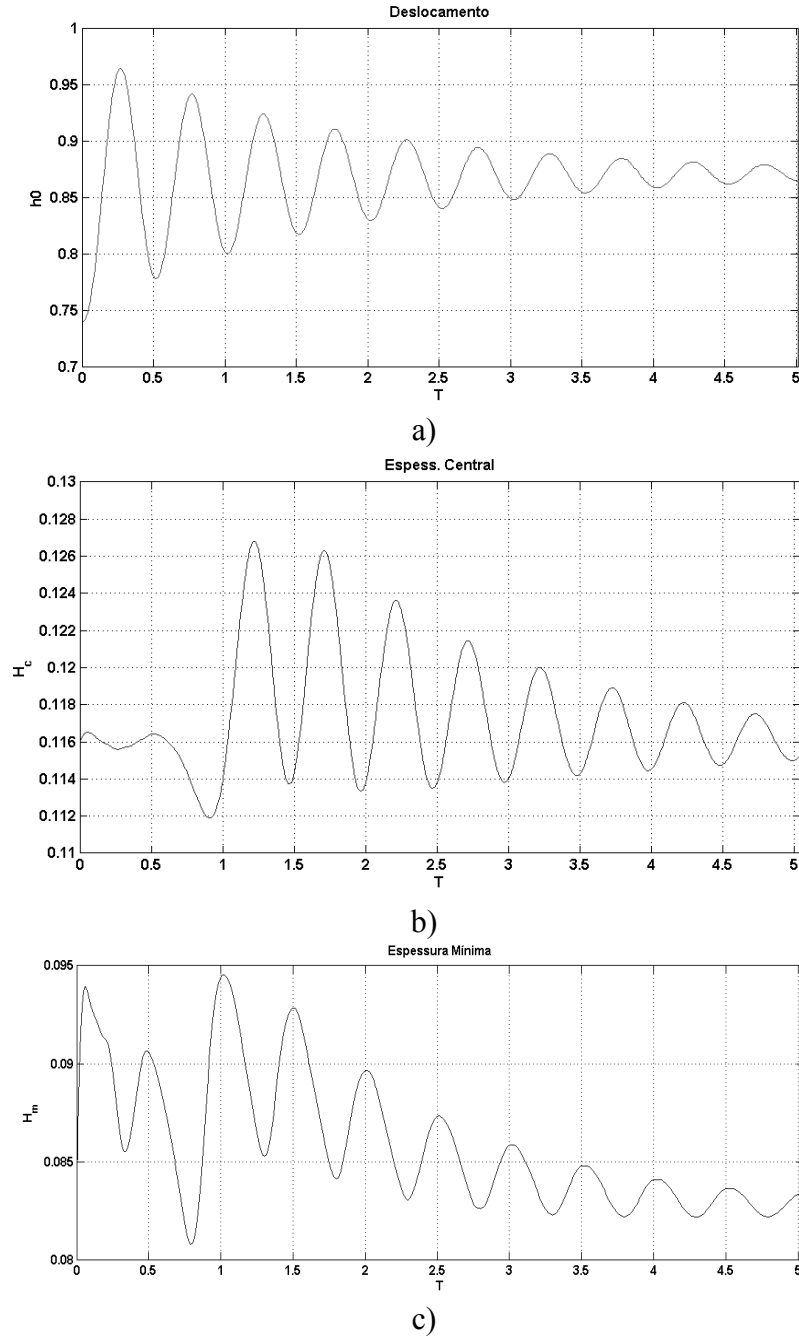


Figura 5.11 – Resposta transiente, a) deslocamento  $H_0$ , b) espessura centra  $H_c$  e c) mínima  $H_m$  ;

A Figura 5.13 também mostra que o decremento por oscilação é próximo entre os casos avaliados. Após uma oscilação, o valor de posição é próximo, porém, com o aumento da frequência, esses valores tendem a se distanciar. Tal fato decorre principalmente da diferente discretização das curvas, com um menor período e o mesmo passo incremental no tempo, a

discretização passa a ser menos precisa. Tal comportamento também está presente nos resultados de Wijnant (1998) .

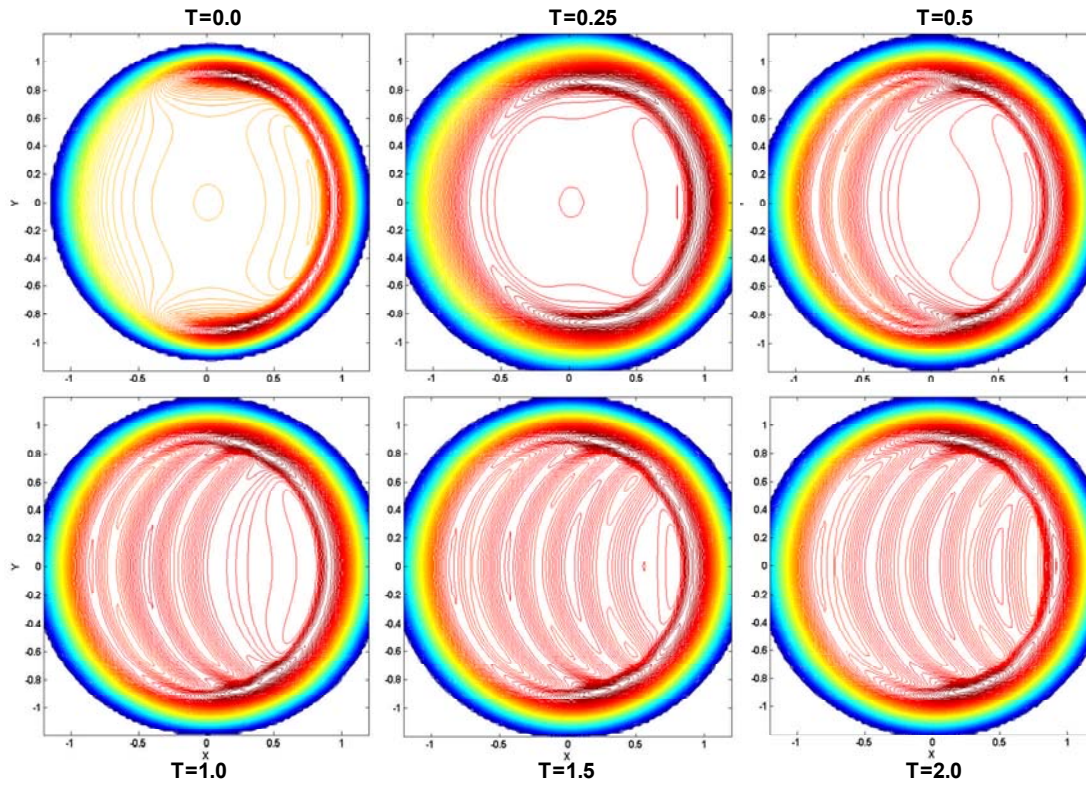


Figura 5.12 –Contornos de espessura para o caso  $M = 200$  ,  $L = 10$  e  $\Omega_n = 10,26$  ;

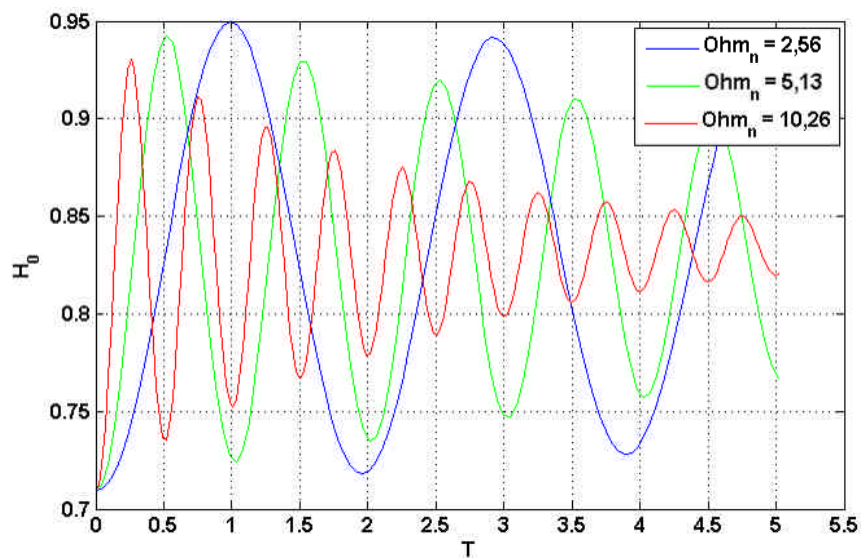


Figura 5.13 –Resposta transiente a três frequências adimensionais  $\Omega_n = 2,56$  ,  $5,13$  e  $10,26$  ;



Nos casos apresentados, a condição inicial da posição foi dada como uma porcentagem do valor do equilíbrio, sendo que para a Figura 5.13 foi de 85%, isto é, o elemento é levantado 15% do seu valor de aproximação da pista e solto para começar o movimento livre. A influência desta condição inicial no comportamento do sistema pode ser observada no gráfico da Figura 5.14.

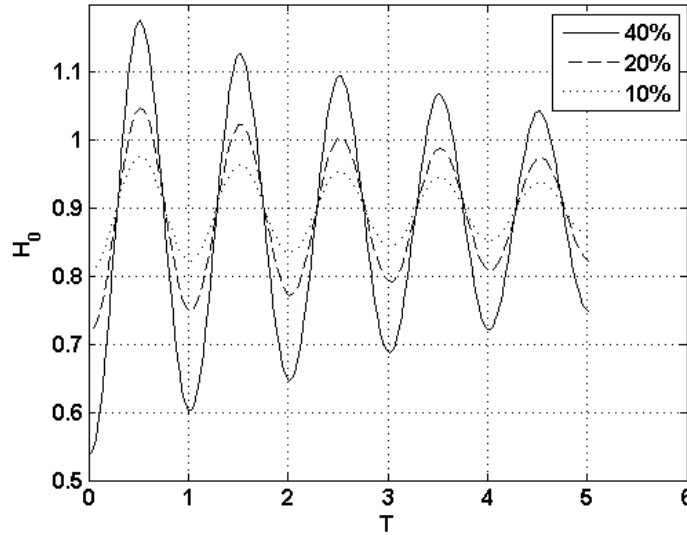


Figura 5.14 –Resposta transiente pra três desvios do equilíbrio estático, 10%, 20%, 40%;

Para o caso de contato EHD  $M = 100$ ,  $L = 5$  e  $k = 1,0$ , foram utilizados três valores de desvio da posição inicial, 10%, 20% e 40%. Apesar da grande diferença nas três condições quanto à amplitude de oscilação, o período se manteve o mesmo, garantindo assim a coerência das características dinâmicas. O equilíbrio estático para este caso é  $H_0 = 0,8980$ .

Para confirmar a hipótese de linearidade imposta por Wijnant em seus trabalhos, foi simulado o caso citado em Wijnant e Wensing (1999), onde é apresentado um gráfico de posição em função do tempo,  $H_0 \times T$ , com o resultado do ajuste linear, sendo a notação adotada no trabalho  $\Delta \times Tempo$ . O caso indicado é  $M = 200$ ,  $L = 10$ ,  $k = 1,0$  e  $\Omega_n = 2,5$ .

O gráfico da Figura 5.15 a) apresenta a resposta transiente tendendo a um valor diferente do equilíbrio estático esperado. O valor obtido para o equilíbrio pelo algoritmo implementado foi

$H_0 = 0,9208$ , muito perto do valor ajustado de  $H_0^* = 0,9239$ , como mostrado na figura 5.15b). Com a divergência nas respostas, um método de ajuste mais robusto para obter os coeficientes dinâmicos do contato deve ser utilizado, evitando assim qualquer desacordo entre simulação e ajuste. Wijnan e Wensing (1999) apresentam um ajuste linear à resposta, como aqui reproduzido na Figura 5.15 a) pela linha tracejada ajustada a resposta simulada, dada pela linha solida. Não foi apresentado nenhum valor numérico para a rigidez no contato neste caso. O amortecimento viscoso adimensional, porém, foi indicado como  $D \approx 0,005$

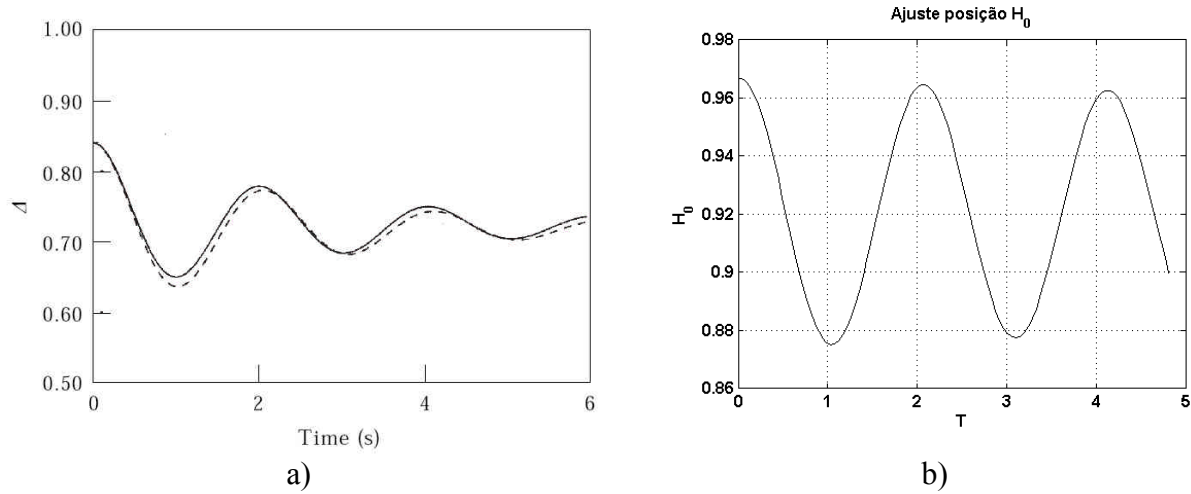


Figura 5.15 –Resposta transiente pra  $M = 200$ ,  $L = 10$ ,  $k = 1,0$  e  $\Omega_n = 2,5$ , a) segundo Wijnant e Wensing (1999), b) simulado

Como anteriormente destacado, um método mais eficaz para o ajuste dos coeficientes do contato é o ajuste direto da força no contato para um sistema dinâmico, linear ou não. Desta forma a força no contato, expressa neste modelo pela integral da pressão sobre a área de contato, deve se ajustar sobre um conjunto mola e amortecedor. O desenvolvimento numérico completo se encontra em Zhao (2005), porém, na sequência, serão descritos os principais pontos.

A priori, para o caso linear, a equação do movimento como apresentada na Equação 4.12, deve ser ajustada pelo método dos mínimos quadrados a:

$$\frac{1}{\Omega_n^2} \frac{d^2 H_0}{dT^2} + D_1 \frac{d H_0}{dT} + K_1 H_0 = 1 \quad 5.4$$

Sendo  $D_1$  e  $K_1$  respectivamente o amortecimento e a rigidez lineares adimensionais. Para simplificação de notação, a variável  $H_0$  será substituída por  $u$  nas próximas equações. Desta forma, definindo uma variável para forças dinâmicas no filme,  $f_d$ , tem-se:

$$f_d = K_1 u + D_1 \dot{u} = \frac{3}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(X, Y, T) dXdY \quad 5.5$$

Pelo método dos mínimos quadrados, pode-se aproximar a força calculada pelo método ao ajuste dinâmico linear. Desta maneira, definindo o mínimo quadrático da diferença como  $q^2$ , obtém-se:

$$q^2 = \sum_{w=0}^N ((f_d)_w - K_1 u_w - D_1 \dot{u}_w)^2 \quad 5.6$$

Minimizando a expressão para  $K_1$  e  $D_1$  tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^2}{\partial K_1} &= \sum_{w=0}^N (f_d)_w u_w - K_1 \sum_{w=0}^N (u_w)^2 - D_1 \sum_{w=0}^N u_w \dot{u}_w = 0 \\ \frac{\partial q^2}{\partial D_1} &= \sum_{w=0}^N (f_d)_w \dot{u}_w - D_1 \sum_{w=0}^N (\dot{u}_w)^2 - K_1 \sum_{w=0}^N \dot{u}_w u_w = 0 \end{aligned} \quad 5.7$$

E por fim, montar o sistema linear resultante implica em:

$$\begin{bmatrix} \sum_{w=0}^N (u_w)^2 & \sum_{w=0}^N \dot{u}_w u_w \\ \sum_{w=0}^N \dot{u}_w u_w & \sum_{w=0}^N (\dot{u}_w)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{w=0}^N (f_d)_w u_w \\ \sum_{w=0}^N (f_d)_w \dot{u}_w \end{bmatrix} \quad 5.8$$

Da simulação numérica resultam posição e velocidade, dadas respectivamente por  $u_w$  e  $\dot{u}_w$ , para cada passo  $w$  da integração temporal. O valor da força dinâmica também é obtido a cada passo da integração pela simples integração da pressão resultante sobre o domínio. Desta forma, de posse do sistema linear da Equação 5.8, são obtidos os valores da matriz de coeficientes dinâmicos, composta, neste caso, por  $K_1$  e  $D_1$ .

Para obtenção do primeiro ajuste linear foi utilizado o mesmo caso presente na Figura 5.13,  $M = 100$ ,  $L = 15$  e  $k = 1,0$ , pois, como apresentado, o comportamento das respostas, mesmo para os três valores de frequência adimensional, devem ser parecidas. Para o caso com maior período, ou seja,  $\Omega_n = 2,65$ , a Figura 5.16 mostra o ajuste linear da força como a linha pontilhada e a resposta simulada em uma linha sólida.

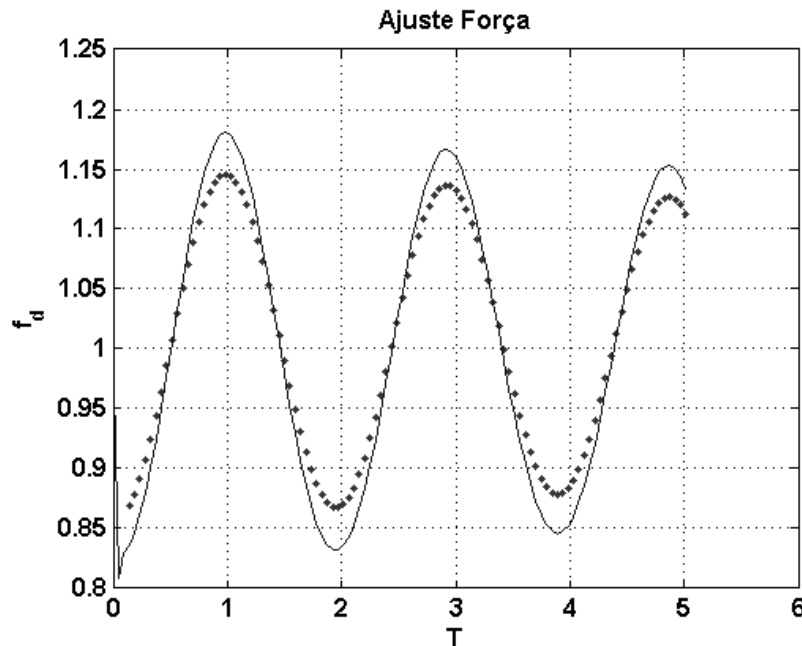


Figura 5.16 –Ajuste linear da força dinâmica no contato para  $M = 100$ ,  $L = 15$ ,  $k = 1,0$  e  $\Omega_n = 2,65$ ;

Apesar de próximo, o ajuste por mínimos quadrados linear não se mostrou suficientemente preciso para a força no contato. De modo a quantificar as discrepâncias e possibilitar uma comparação dos resultados, será introduzido o conceito do erro de aproximação da força,  $e_f$ ,

como sendo a média absoluta das diferenças pontuais entre valores simulados e valores ajustados. Neste caso o erro é de  $e_f = 2,1364 \times 10^{-3}$ . Para este ajuste, os valores obtidos para as constantes dinâmicas do contato foram:  $D_1 = 0,00594$  e  $K_1 = 1,2073$ .

Para verificar, então, a resposta dinâmica do sistema, agora caracterizado pelas constantes  $D_1$  e  $K_1$ , a Equação 5.4 deve ser avaliada com as mesmas condições iniciais, de forma a obter a mesma resposta gerada pelo modelo EHD. Utilizando dois integradores implícitos tipo Runge-Kutta, um de quarta e quinta ordens e outro de segunda e terceira ordens adaptado para problemas mais rígidos, ambos com incremento de tempo variável. Estes integradores são parte integrante do pacote computacional comercial MATLAB®, e serão denominados ode45 e ode23 respectivamente.

Ambas as repostas estão presentes no gráfico da Figura 5.17. Da mesma forma, uma média dos desvios pontuais entre ajuste e resposta simulada pode ser avaliada. Para o caso da posição têm-se  $e_{u,ODE45} = 1,2173 \times 10^{-2}$  e  $e_{u,ODE23} = 1,2305 \times 10^{-2}$ .

Como indicado pelo valor do erro de posição, utilizando o ajuste linear, não foi possível obter uma concordância suficiente para o resultado. Para os outros dois casos de período menor, onde  $\Omega_n = 5,13$  e  $\Omega_n = 10,26$ , foi utilizado o mesmo procedimento, estando os valores de ajuste listados na Tabela 5.8.

Apesar da proximidade nos valores obtidos, que confirma a independência das características da frequência adimensional, estes ainda são distantes de resultados satisfatórios para a resposta transiente do sistema, ainda apresentando o desvio de frequência, como observado na Figura 5.17, para todos os casos, Figura 5.18.

Desta maneira, apesar do resíduo pequeno para a posição, para o caso  $\Omega_n = 10,26$ , ainda existe um erro grande no processo de ajuste para o caso linear. De modo a quantificar melhor este erro, será introduzida uma quarta medida de erro. Desta vez, porém, os coeficientes calculados serão utilizados para obtenção da curva de aceleração, que também pode ser comparada com a

aceleração calculada pelo integrador Newmark- $\beta$ . A equação utilizada para esta avaliação é a mesma apresentada na Equação 5.4, entretanto isolando-se o termo  $\ddot{u}$ . Neste caso a média dos desvios pontuais das acelerações para os três casos está apresentada na sétima coluna da Tabela 5.8, designada por  $e_{\ddot{u}}$ .

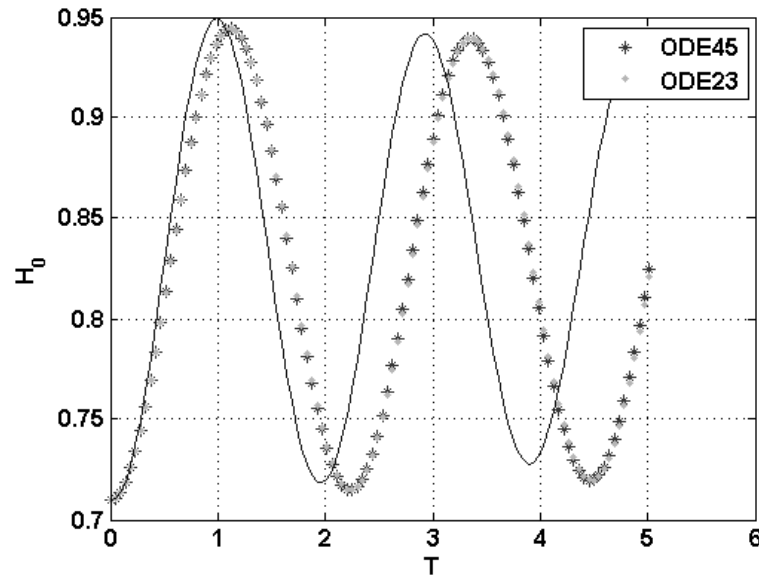


Figura 5.17 –Ajuste linear da posição para o contato:  $M = 100$ ,  $L = 15$ ,  $k = 1,0$  e  $\Omega_n = 2,65$ ;

Tabela 5.8 – Dados do ajuste Linear para o contato  $M = 100$ ,  $L = 15$ ,  $k = 1,0$ ;

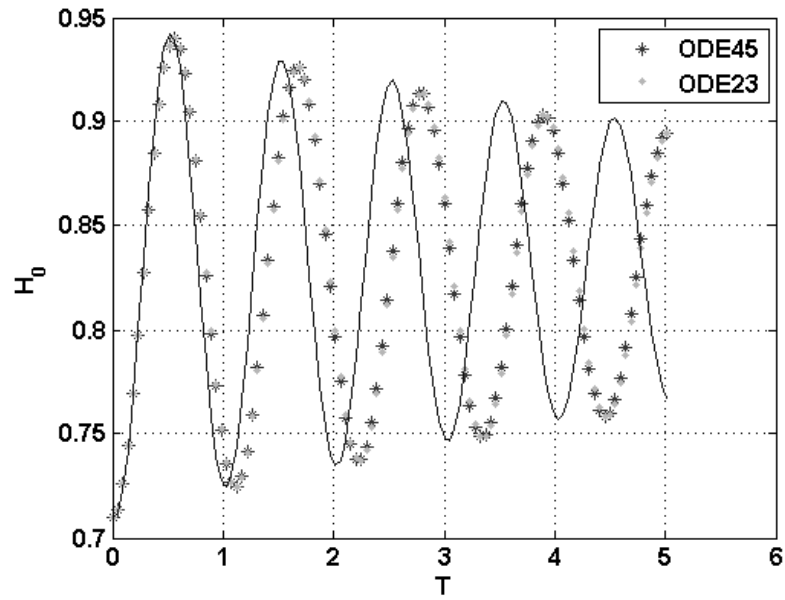
$\Omega_n$	$K_1$	$D_1$	$e_f$	$e_{u,ODE45}$	$e_{u,ODE23}$	$e_{\ddot{u}}$
<b>2,65</b>	1,2073	0,0059	2,1079E-03	1,2173E-02	1,2305E-02	3,1248E-01
<b>5,13</b>	1,2070	0,0089	1,4607E-03	1,3843E-03	1,5299E-03	1,2551E+00
<b>10,26</b>	1,2052	0,0078	5,6474E-04	4,5841E-04	4,2394E-04	2,6578E+00

Com os resultados obtidos, o modelo linear para o contato, aqui ajustado pelo método dos mínimos quadrados, apresente baixa correlação de seus resultados com os valores simulados pelo algoritmo EHD elíptico transiente implementado. Assim sendo, um método de ajuste mais sofisticado e robusto deve ser utilizado.

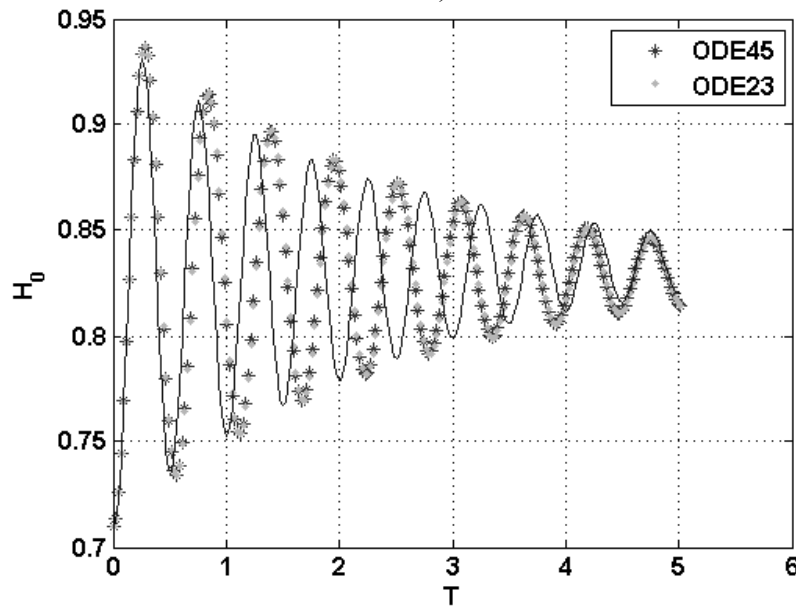
Da mesma maneira que a matriz linear dos coeficientes foi introduzida no sistema linear presente na Equação 5.8, uma matriz não linear pode ser derivada de uma aproximação não linear para a força dinâmica no contato. Adicionando à Equação 5.5 os termos quadrados, cúbicos e

mistos de rigidez e amortecimento para a força dinâmica, obtêm-se um conjunto total de sete coeficientes, conforme a Equação 5.9.

$$f_d = K_1 u + D_1 \dot{u} + K_2 u^2 + D_2 \dot{u}^2 + K_3 u^3 + D_3 \dot{u}^3 + B_4 u \dot{u} \quad 5.9$$



a)



b)

Figura 5.18 –Ajuste linear da posição para o contato:  $M = 100$ ,  $L = 15$ ,  $k = 1,0$  a)  $\Omega_n = 5,13$  e

b)  $\Omega_n = 10,26$ ;

Analogamente, aplica-se a Equação 5.9 o método dos mínimos quadrados para obter um sistema linear, agora de sete equações e sete incógnitas, onde as variáveis desconhecidas são os coeficientes dinâmicos não lineares do contato.

Porém, como todo método de ajuste, alguns dos coeficientes dinâmicos não têm grande influência sobre a qualidade do ajuste. Para observar a sensibilidade do equacionamento uma resposta padrão, com todos os coeficientes, é utilizada como referência, para fins de comparação com outras respostas excluindo alguns coeficientes. Os resultados estão listados na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 –Análise de sensibilidade do modelo de ajuste não linear;

Coef.	Todos	$-K_1$	$-D_1$	$-K_2$	$-D_2$	$-K_3$	$-D_3$	$-B_4$
$e_f$	4,0598E-08	3,1971E-05	4,4172E-08	6,8039E-07	5,9783E-08	1,9215E-06	4,3791E-08	4,6021E-08
$e_{ii}$	2,7114E-05	1,6217E-02	2,9566E-05	4,4901E-04	3,8068E-05	1,2183E-03	2,9376E-05	3,1213E-05

As únicas variações importantes dos resíduos, tanto para força quando para aceleração, se deram na retirada dos coeficientes de rigidez de primeira, segunda e terceira ordem. Desta forma, um modelo com estes coeficientes de rigidez e com apenas o amortecimento viscoso linear é suficiente para ajustar a resposta. A hipótese de amortecimento viscoso já havia sido apresentada por Wijnant (1998), quando previu que as curvas que descrevem a resposta transiente fossem exponenciais, porém apenas graficamente.

Com os quatros coeficientes mais relevantes, reduz-se o sistema linear do ajuste para apenas quatro equações e quatro incógnitas, sendo estas  $K_1$ ,  $D_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$ . Reproduzindo, então, os ajustes da Tabela 5.8, porém para o novo modelo não linear foram, obtidos os resultados da Tabela 5.10.

Os dados ajustados para o caso de menor período, ou seja, com  $\Omega_n = 10,26$  foram obtidos com o mesmo número de pontos que os outros dois casos, porém para um período total de tempo adimensional menor, o que aumenta a precisão da resposta simulada. Apesar do indicado em prévios estudos de convergência por Wijnant (1998), uma discretização menor da resposta no



tempo é necessária para uma maior coerência do resultado. Um processo com incrementos de tempo variável, como introduzido por Goodyer (2001), deve gerar resultados mais precisos.

Para o caso  $\Omega_n = 5,13$ , os gráficos da Figura 5.19 a) e b) mostram, respectivamente, o ajuste da força dinâmica no contato e o ajuste da aceleração do sistema. Ambos os casos, agora, apresentam coerência do ajuste aos resultados de baixo resíduo. Não somente aceleração e força se mostraram mais coerentes, mas também o ajuste de posição, não mais apresentou a tendência a alongamento do período, como pode ser visto no gráfico da Figura 5.20, também para o caso  $\Omega_n = 2,65$ .

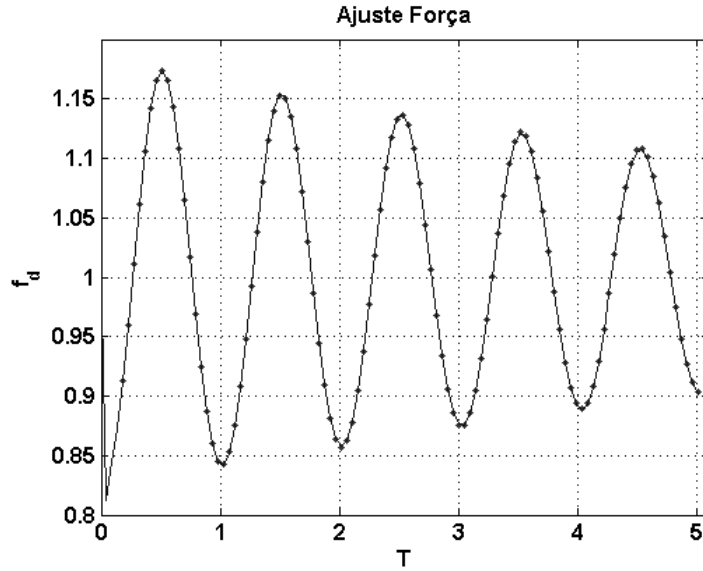
Tabela 5.10 – Dados do ajuste Não Linear para o contato  $M = 100$ ,  $L = 15$ ,  $k = 1,0$ ;

$\Omega_n$	$K_1$	$D_1$	$K_2$	$K_3$	$e_f$	$e_{ii}$
<b>2,65</b>	0,9108	0,0112	0,3330	0,0169	3,2120E-08	9,7913E-06
<b>5,13</b>	0,9293	0,0093	0,2858	0,0514	5,9053E-08	3,8751E-05
<b>10,26</b>	0,8933	0,0081	0,3396	0,0377	5,3282E-09	5,0883E-06

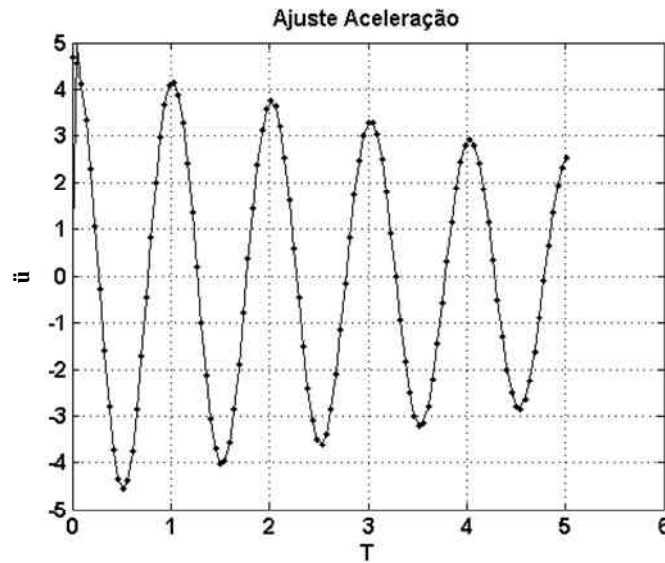
De forma a comparar também o efeito da aproximação inicial sobre a caracterização do contato, os casos apresentados na Figura 5.14 foram ajustados para o caso não linear. A Tabela 5.11 apresenta os resultados de tal ajuste. Observa-se que apesar das diferentes condições iniciais impostas os valores dos coeficientes estão próximos. Mais uma vez, a discretização no tempo é um fator crucial, o caso de maior desvio apresenta maiores gradientes e, com isso, necessita de maior discretização para garantir uma adequação da simulação. Mesmo desta forma ocorre um maior desvio do valor esperado.

Tabela 5.11 – Dados do ajuste Não Linear para o contato três casos de desvio da condição estática como condição inicial;

<b>Desvio do Equilíbrio</b>	$K_1$	$D_1$	$K_2$	$K_3$	$e_f$	$e_{ii}$
<b>10%</b>	0,6694	0,0132	0,5387	-0,0475	8,7696E-09	6,6995E-06
<b>20%</b>	0,6833	0,0136	0,5200	-0,0393	1,1525E-07	4,6498E-05
<b>40%</b>	0,7311	0,0138	0,4568	-0,0119	3,9656E-07	1,2609E-04



a)



b)

Figura 5.19 –Ajuste não linear a) da força dinâmica no contato e b) da aceleração do sistema, de acordo com Tabela 5.10, caso  $\Omega_n = 5,13$ ;

Apesar de o valor de amortecimento para os três casos se mostrar bastante estável, os valores dos coeficientes de rigidez apresentaram certo desvio. Tal comportamento pode ser esperado, pois como indicado anteriormente, a rigidez no contato não necessariamente se comporta como o polinômio de terceiro grau utilizado nas análises. Esta rigidez não linear foi descrita para o contato seco e utilizado por Fukata (1985) para descrever a órbita dos mancais de elementos rolantes no tempo.

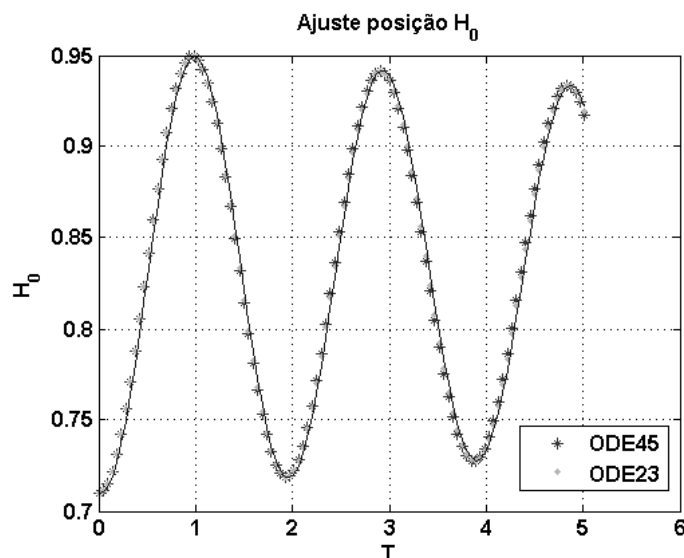


Figura 5.20 –Ajuste não linear do deslocamento do sistema, de acordo com Tabela 5.10, caso

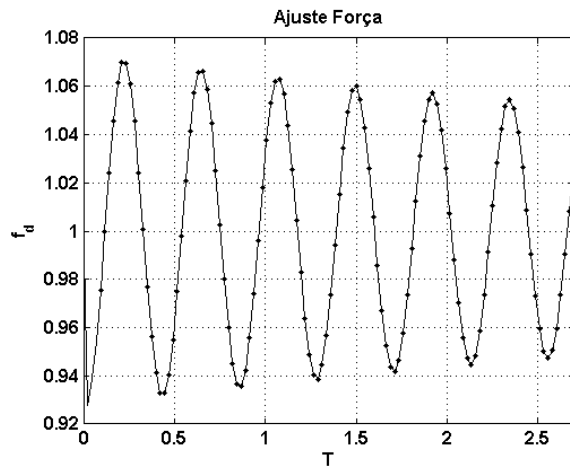
$$\Omega_n = 2,65;$$

Depois de encontrado um método confiável para o ajuste das forças no contato e, consecutivamente, para os coeficientes dinâmicos do filme de óleo, o contato no mancal de elemento rolante pode ser estudado. Como previsto anteriormente, dois casos do mancal serão estudados. Ambos representam o contato na esfera de posição angular mais carregada, sendo estes o contato interno e externo, com suas características presentes na Tabela 5.6.

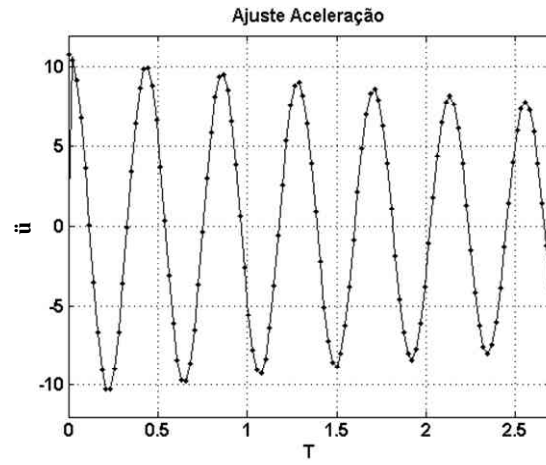
Os valores calculados para os coeficientes dinâmicos do contato esfera-pista interna no mancal de elementos rolantes, assim como os valores dos resíduos do ajuste estão listados na Tabela 5.12. Mais uma vez, devido à alta frequência adimensional, a discretização da resposta é baixa, sendo assim os resultados devem ser olhados com cautela. Os gráficos da Figura 5.21 mostram os ajustes da força dinâmica no contato e posição.

Tabela 5.12 – Dados do ajuste Não Linear para o contato Elemento-Pista Interna no Mancal FAG6005,  $M = 9912$ ,  $L = 11,75$ ,  $k = 0,1092$ ;

$\Omega_n$	$K_1$	$D_1$	$K_2$	$K_3$	$e_f$	$e_{ii}$
<b>12,14</b>	0,3652	0,0017	0,8098	-0,1509	1,1208E-10	9,2454E-07



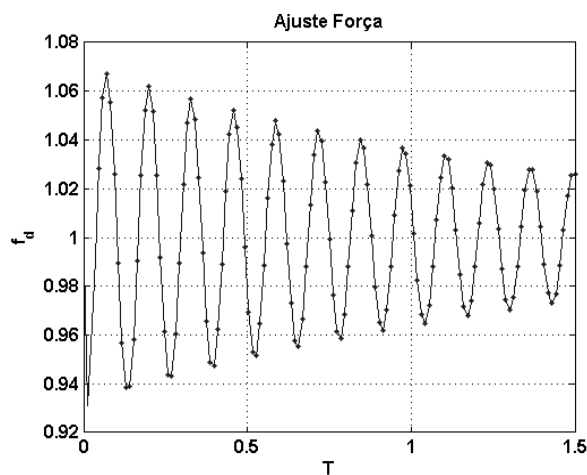
a)



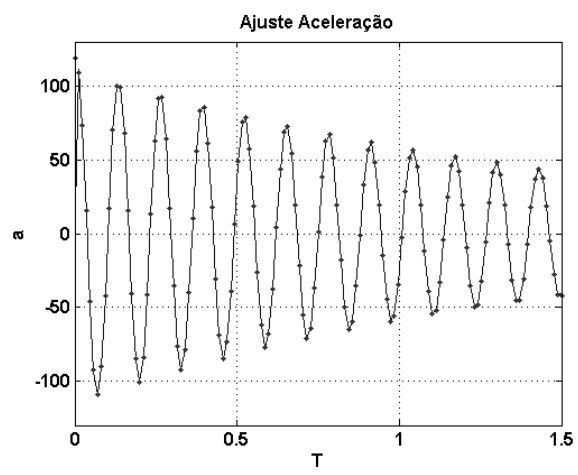
b)

Figura 5.21 –Ajuste não linear a) da força dinâmica no contato e b) da aceleração do sistema para o contato Elemento-Pista Interna no Mancal FAG6005,  $M = 9912$ ,  $L = 11,75$ ,  $k = 0,1092$ ;

O mesmo ocorre para o contato Elemento-Pista Externa, que foi simulado para um período menor de tempo, porém com maior número de pontos. Como a frequência adimensional, neste caso, é quase quatro vezes maior que a do contato com a pista interna, o ajuste também fica prejudicado. A Tabela 5.13 e os gráficos da Figura 5.22 apresentam os resultados do ajuste para este contato.



a)



b)

Figura 5.22 –Ajuste não linear a) da força dinâmica no contato e b) da aceleração do sistema para o contato Elemento-Pista Externa no Mancal FAG6005,  $M = 13373$ ,  $L = 8,38$ ,  $k = 0,1357$ ;

Tabela 5.13 – Dados do ajuste Não Linear para o contato Elemento-Pista Externa no Mancal FAG6005,  $M = 13373$ ,  $L = 8,38$ ,  $k = 0,1357$ ;

$\Omega_n$	$K_1$	$D_1$	$K_2$	$K_3$	$e_f$	$e_{ii}$
<b>40,29</b>	0,5103	0,0009	0,4787	0,0255	4,1041E-10	5,8939E-07

Para ambos os casos, o resíduo do ajuste ficou muito baixo, mostrando uma boa coerência entre resposta transiente obtida pelas simulações e os valores dos coeficientes dinâmicos do contato ajustados. Porém, o comportamento da resposta transiente da posição deve ficar prejudicado devido à discretização, e não ao método de ajuste, quando se leva em conta os coeficientes obtidos. Este efeito pode ser visto na Figura 5.23

Com estes resultados, se valida o modelo de ajuste não linear para as forças do contato EHD, e assim, torna-se possível a obtenção dos coeficientes dinâmicos do contato. Uma possível solução para o problema da discretização para contatos com parâmetros muito variantes é definir o tamanho da malha temporal associado ao período de oscilação, obtendo, assim, uma discretização mais coerente para cada caso.

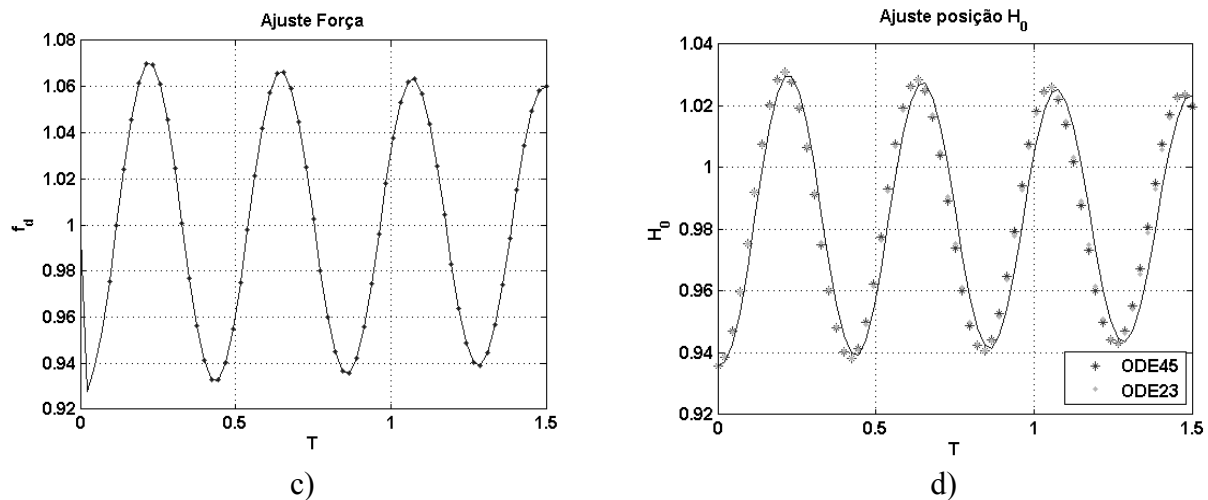


Figura 5.23 –Detalhe do ajuste não linear a) da força dinâmica no contato e b) da posição do sistema para o contato Elemento-Pista Interna no Mancal FAG6005;

A simulação transiente do contato EHD em mancais de elementos rolantes ainda é muito custosa computacionalmente, principalmente pelo cálculo da integral de deformação. Uma

melhora no desempenho deste procedimento em particular pode acelerar o processo completo, tornando, assim, a obtenção destes coeficientes dinâmicos mais amigável. O método introduzido por Liu (2000) deve diminuir o custo computacional, pois utiliza uma Transformada de Fourier para calcular a integral, devido a sua forma se assemelhar a uma integral de convolução.

O modelo de ajuste não linear, na forma apresentada, também pode ser aplicado à resposta harmônica do contato. Porém, deve-se sempre levar em conta a força no contato e não o carregamento harmônico aplicado. Neste caso, a velocidade dos corpos deve ser obtida através da diferenciação da resposta transiente de posição no tempo.

A aproximação do contato dinâmico EHD a um sistema massa-mola-amortecedor facilita a análise dinâmica de sistemas mecânicos, sujeitos a tal forma de lubrificação. Um modelo não linear para tais sistemas é de grande valia na simulação de conjuntos maiores, sendo possível a visualização da influência dinâmica destes componentes no comportamento geral do sistema completo.

## **Capítulo 6**

### **Conclusão**

Com a introdução do modelo transiente ao equacionamento Elastohidrodinâmico, como apresentado em Nonato (2008), o modelo geral para o contato se torna mais preciso e robusto, com a possibilidade de ampliar a gama de análises destes sistemas. Como explorado neste trabalho, na área da dinâmica do contato, torna-se possível a observação do comportamento destes contatos em casos especiais, como carregamentos harmônicos e vibrações livres.

Os primeiros resultados, obtidos para o caso estáticos, com o objetivo de validar o equacionamento elíptico, foram bem satisfatórios, possibilitando a aplicação do mesmo aos casos mecânicos reais, como aqui apresentado para mancais de elementos rolantes. Principalmente, levando em conta os possíveis problemas ressaltados por Goodyer (2001), o resíduo apresentou uma boa convergência tanto para a pressão quanto para o balanço de forças, como na Tabela 5.3.

Parte dos efeitos observados sobre a convergência devem-se às melhorias no processo híbrido de relaxamento. A utilização de uma fronteira fixa para o parâmetro  $x$  da equação de Reynolds facilita a convergência, principalmente em casos de altas cargas, como observados no mancal simulado. A implementação, como descrita em Nonato e Cavalca (2008), leva em conta então o valor  $x$  invariante entre as malhas, possibilitando um maior controle das zonas onde ocorrem as relaxações por cada método.

Como observado em trabalhos anteriores, Wijnant (1998) e Nijenhuis (1994), a influência principal da elipsidade sobre o contato se dá na forma de amenizador das pressões

sobre a área, exatamente por aumentar esta mantendo a carga. Com a redução deste fator, a elipse torna-se mais estreita na direção transversal a direção do fluxo, o que fisicamente produz uma predominância dos efeitos do gradiente de pressão na direção do fluxo. Numericamente, fica explícito a redução do segundo termo de *Poiseuille* pelo fator de elipsidade  $k$ .

Os resultados mais importantes deste modelo, porém, são aqueles para o valor adimensional da aproximação dos corpos. Utilizando o ajuste proposto por Wijnant (1998) para validar o algoritmo, os resultados obtidos ficaram satisfatoriamente próximos aos valores de comparação. Estes valores, diretamente relacionados com o balanço de forças no contato, são de suma importância tanto para o caso estático quanto para o dinâmico, uma vez que se tornam a variável principal do sistema.

A convergência dos valores da aproximação apresentou um comportamento de segunda ordem, segundo a Tabela 5.4, como esperado. Este efeito deve-se basicamente ao fato de, a cada nível, a distribuição de pressão estar representada por mais ou menos pontos. Como em um nível inferior de malha, com menos pontos, a pressão assume uma representação mais grosseira da distribuição final, o fator de aproximação, derivado diretamente do balanço de forças, se torna diferente, pois a integral numérica sobre tal domínio também é diferente. Este comportamento também pode ser esperado para variáveis como espessura central e mínima do filme.

O equacionamento estático, por fim, aplicado ao caso de mancais de elementos rolantes, retornou uma curva de pressão onde os efeitos dinâmicos previstos na equação de Reynolds são superados pela influência da parcela elástica do contato, retornando curvas mais próximas ao contato hertziano. Desta forma, os valores da aproximação dos corpos ficam mais próximos a 1,0 assintoticamente, valor este que representa o caso do contato seco.

Ao introduzir, então, a força harmônica como apresentada, o modelo quase estático apresentou também uma resposta harmônica, conforme previamente observada tanto em Wijnant (1998) quanto em Goodyer (2001). As alterações impostas ao código serviram principalmente para validar a introdução do termo de *Squeeze* à equação de Reynolds. Desta maneira, os efeitos de propagação de onda no filme de lubrificante foram perfeitamente observados. Vários são os



trabalhos propostos que sumarizam os resultados devido ao transporte previsto pelo termo de advecção, como Venner e Ludbrecht (1994,1996). Neste trabalho, a influência da propagação sobre as espessuras do filme de óleo é tratada nas Figuras 5.8 e 5.9, confirmando a hipótese de velocidade adimensional 1,0 para frente de onda, ou seja, qualquer perturbação introduzida na entrada do contato leva cerca de 1,0 segundo adimensional para atingir o centro do contato.

Nesta forma, o algoritmo é funcional para gerar resultados tanto estáticos quanto dinâmicos para o contato EHD. Porém, optou-se, neste trabalho, por utilizar a resposta da vibração livre para caracterizar o contato em detrimento a resposta harmônica, apenas pelo fato de ser possível observar a influência da inércia nos procedimentos de ajuste.

A introdução dos termos de inércia se deu pela utilização da equação de movimento aplicada ao sistema do contato, onde o elemento rolante se torna a massa suspensa por componentes dinâmicos sobre as pistas, tanto interna quanto externa. Neste caso, fica evidente que as forças dinâmicas geradas no contato, isto é, agindo sobre o filme de lubrificante, são diretamente relacionadas às constantes dinâmicas, que foram obtidas pelo ajuste por mínimos quadrados.

Com a utilização do integrador Newmark- $\beta$ , esta equação de movimento foi avaliada como parte do sistema de equações do problema, gerando tanto as curvas da resposta transiente da aproximação dos corpos, assim como a velocidade e aceleração, necessárias ao processo de ajuste.

Para este caso transiente, a introdução da frequência adimensional  $\Omega_n$ , como o fator definido pela massa suspensa, determina o período de oscilação da resposta. Diretamente ligado ao contato seco, tal período de oscilação foi observado como  $T_n = 5,13/\Omega_n$ , assim como em Wijnant (1998), diferentemente do caso harmônico em que a frequência era diretamente proporcional a frequência da excitação.

Nestas respostas, porém, a variável posição tem sua amplitude de oscilação balizada pelo amortecimento viscoso gerado no filme, tendendo, assim, ao valor do equilíbrio estático, imposto

pelas características do contato. Este comportamento pode ser visto na Figura 5.11, que também mostra o comportamento das variáveis espessura mínima e espessura central do filme. Estas duas variáveis, assim como no caso harmônico, são afetadas pela propagação dos distúrbios através do contato.

Variando a frequência adimensional, o filme apresentou características muito similares de amortecimento, como visto na Figura 5.13. Também variou-se a condição inicial de posição, imposta de maneira a gerar o movimento transiente. Neste caso, observa-se que o período de oscilação é indiferente a tais condições, mantendo-se constante para o mesmo contato.

Utilizando o ajuste linear por mínimos quadrados sobre as respostas obtidas, os resultados de Wijnant (1998) e Wijnant (1999) não foram obtidos. Porém, a utilização do mesmo método de ajuste para o caso não linear se mostrou bastante precisa e robusta.

Tanto para o caso de variação de frequência adimensional, quanto para as variações da condição inicial de posição, o ajuste por mínimos quadrados prevê resultados similares para os coeficientes dinâmicos do contato. Desta forma, confirma-se tanto a validade dos resultados do algoritmo utilizado, quanto os valores ajustados. A Tabela 5.9 e 5.10, assim como as Figuras 5.19 e 5.20, mostram estes resultados.

De posse do algoritmo transiente para vibrações livres, aqui indicado, juntamente ao modelo não linear de ajuste da força dinâmica, o contato no mancal de elementos rolantes pôde ser estudado. O ajuste não linear para ambos os casos simulados foi coerente, indicando um alto grau de precisão no ajuste. Porém, a utilização das condições de contato previstas nas Tabelas 5.6 e 5.7 geram períodos de oscilação muito curtos, necessitando uma maior discretização no tempo.

Portanto, o objetivo principal deste trabalho foi alcançado satisfatoriamente, sendo apresentado um método para análise dinâmica de contatos EHD. Sua aplicação em casos reais é aceitável, feitas algumas correções quanto à precisão numérica, reduzindo o passo temporal. Desta forma, é possível, através do método dos mínimos quadrados, ajustar coeficientes

dinâmicos não lineares ao contato, de forma a caracterizá-lo e possibilitar sua posterior simulação em aplicações diversas.

## **Sugestões para Trabalhos Futuros**

Tendo em vista os avanços obtidos neste trabalho, surgem as sugestões para futuros trabalhos sobre o tema. O próprio algoritmo utilizado para as simulações transientes do contato EHD possui pontos onde há espaço para otimização dos métodos numéricos. Um destes pontos é a custosa integral de deformação que apresenta uma característica muito específica de singularidade. Métodos alternativos para sua avaliação são pontos de interesse nesta área.

O próprio método de ajuste pode ser estendido para mais casos reais de contatos EHD, como por exemplo o contato em CVT toroidal. A simulação numérica deve levar em conta todos os fatores que implicarem em melhor representação dos resultados, porém o ajuste pode ser executado, caracterizando e comparando diferentes fluidos ou contatos. Da mesma forma, os métodos de ajuste podem ser estendidos para outros padrões não lineares de coeficientes dinâmicos, buscando um ajuste ainda melhor das forças no filme lubrificante.

Com a caracterização do contato em mancais de elementos rolantes, o sistema como um todo passa a ser passível de solução, com a introdução do amortecimento provido pelo filme de óleo. Desta maneira, os vínculos rígidos, ou não amortecidos, como anteriormente modelados, passam a ser elementos dinâmicos no conjunto mecânico. Desta maneira, outras aplicações de contato EHD podem ser simuladas, por exemplo, para casos unidimensionais ou Termo-EHD, com a adaptação do algoritmo.

## ***Bibliografia***

Bair, S., Jarzynski, J., Winer, W., The temperature, pressure and time dependence of lubricant viscosity, *Tribology International*, vol. 34, pp. 461-468, 2001.

Bair, S., Khonsarit, M., Winter, W. O., High Pressure Rheology of Lubricants and Limitations of the Reynolds Equation, *Tribology International*, v. 31, (10), pp. 573-586, 1998.

Brandt, A., Venner, C.H., Multilevel Evaluation of Integral Transform on adaptive grids, In: Report WI/CG-5, *Weizmann Inst. of Sci.*, 1996, 26p.

Castro, H. F., Cavalca, K. L., Non-Linear Hydrodynamic Bearing Force Characterization under Fluid-Induced Instability, In: DINAME 2009, *Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, 10p. 2009.

Changsen, W., *Analysis of Rolling Element Bearings*, London: Mechanical Engineering Publications LTD, 1991.

Dowson, D., Higginson, G. R., “*Elasto-hydrodynamic Lubrication – SI Edition*”, Pergamon Press, 1<sup>st</sup> ed., Great Britain, 1977.

Eschmann, Halsbargen, Weigand, “*Ball and Roller Bearings Theory, Design and Application*”, John Wiley & Sons, Chichester, 1985.

Fukata, S., Gad, E., Kondou, T., “On the Radial Vibration of Ball Bearings”, *Bulletin of JSME*, vol. 28, No.239, 1985.

Goodyer, C. E., Berzins, M., Adaptive Timestepping Methods for Elastohydrodynamic Lubrication Solver, *SIAM Journal Sci. Comput.*, vol. 28, (2), pp. 626-650, 2006.

- Goodyer, C. E., Fairlie, R., Berzins, M., Scales, L.E., Adaptive Mesh Methods for Elastohydrodynamic Lubrication, In: European Cong. On Comp. Methods in Applied Sci. and Eng., *ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*, 2001, 17p.
- Goodyer, C. E.; *Adaptive Numerical Methods for Elastohydrodynamic Lubrication*, Leeds, Inglaterra: University of Leeds, 2001, 179p., Tese(Doutorado).
- Hamrock, B. J., Schmid, S. R., Jacobson, B. O., *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, New York: McGraw Hill, 1994, 728p.
- Hamrock, Bernard. J., *Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts*, Leeds, Inglaterra: Leeds University, 1976, 256 p., Tese(Doutorado).
- Harris, T.A., Mindel, M. H., Rolling Element Bearing Dynamics, *Wear*, vol. 23, pp. 311-337, 1973.
- Harris, T.A., *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1991, 1013p.
- Kaneta, M., Shigeta, T., Yang, P., Film pressure distributions in point contacts predicted by thermal EHL analyses, *Tribology International*, vol. 39, pp. 812-819, 2006.
- Larsson, R., Larsson, P. O., Eriksson, E., Sjöberg, M., Höglung, E., Lubricant properties for input to hydrodynamic and elastohydrodynamic lubrication analyses, In: IMechE 2000, *Proceedings Instn. Mech. Engrs.*, vol 214,(J), pp. 17-27.
- Lepore, F., Melo, J., Santos, M., Non-linear signal analysis applied to surface wear condition monitoring in reciprocating sliding testing machines. *Shock and Vibration*, Amsterdam, v. 13, n. 4-5, p. 327-341, 2006.
- Liew, A., Feng, N., Hahn E. J., Transient Rotordynamic Modeling of Rolling Element Bearing Systems, *J. of Eng. for Gas Turbines and Power*, vol. 124, pp 984-991, 2002.
- Liu, S., Wang, Q., Liu, G., A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses, *Wear*, vol. 243, pp. 101-111, 2000.

- Maru, M; Padovese, L., Influence of oil contamination on the vibration and wear of all and roller bearings. *Industrial Lubrication and Tribology*, v. 59, p. 137-142, 2007.
- Moes, H., Optimum similarity analysis with applications to elastohydrodynamic lubrication, *Wear*, vol. 159, pp. 57-66, 1992.
- Molimard, J., Querry, M., Vergne, P., Krupka, I., Hartl, M., Calculation of pressure distribution in EHD point contacts from experimentally determinate film thickness, *Tribology International*, vol. 38, pp. 391-401, 2005.
- Natsumeda, S., Application of multi-level multi-integration to contact problems Part 1: non-Hertzian contact in rolling bearings, In: IMechE 1999, *Proceedings Instn. Mech. Engrs.*, 1999, vol. 213, (J), pp. 63-80.
- Nijenbanning, G., Venner, C.H., Moes, H., Film thickness in elastohydrodynamically lubricated elliptic contacts, *Wear*, vol. 176, pp. 217-229, 1994.
- Nonato, F., Cavalca, K.L., Performance Evaluation of the Relaxation Methods in the Multi-Level Modelo of Elastohydrodynamic Lubricated Contacts, In: *XIX CILAMCE-Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2008, 15 p.
- Nonato de Paula, Fábio, Avaliação do Problema de Lubrificação Elastohidrodinâmica EHD Utilizando Modelagem em Múltiplos Níveis, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, 2008, 64 p., Monografia (Graduação)
- Nurgat, E., Berzins, M., Scales, L., Solving EHL Problems Using Iterative, Multigrid and Homotopy Methods. *J. of Tribology*, vol. 121, pp. 28-33, 1999.
- Popovici, G., Venner, C.H., Lugt, P.M., Effects of Load System Dynamics on the Film Thickness in EHL Contacts during Start Up, *J. of Tribology*, vol. 126, pp. 258-266, 2004.
- Rico, J.E.F., Battez, A.H., Cuervo, D.G., Rolling Contact Fatigue in lubricated contacts, *Tribology International*, vol. 36, pp.35-40, 2003.

- Santos, Marcelo Braga, *Identificação da Força de Atrito através de Análise de Sinais Não Lineares em Ensaio Tribológicos*, Uberlândia, Brasil. Universidade Federal de Uberlândia, 2005.
- Sawada, T., On the pressure projection in elasto-hydrostatic lubrication problems-Part1: Mechanical study of the Reynolds equation, *Int. J. of Mechanical Sciences*, vol. 47, pp. 822-848, 2005.
- Spikes, H. A., Sixty Years of EHL, *Lubrication Science*, vol. 18, pp. 265-291, 2006.
- Venner, C. H., Lubrecht, A. A., *Multilevel Methods in Lubrication*, Netherlands:Elsevier, Tribology Series, vol 37, 2000, 400p.
- Venner, C. H., Lubrecht, A. A., Numerical Analysis of the Influence of Waviness on the Film Thickness of a Circular EHL Contact, *ASME Journal of Tribology*, vol. 118, pp. 153-161, 1996.
- Venner, C. H., Lubrecht, A. A., Numerical Simulation of a Transverse Ridge in a Circular EHL Contact Under Rolling/Sliding, *ASME Journal of Tribology*, vol. 116, pp. 751-761, 1994.
- Venner, C.H., Bos, J., Effects of lubricant compressibility on the film thickness in EHL line and circular contacts, *Wear*, v. 173, pp. 151-165, 1994.
- Venner, C.H., ten Napel, W.E., Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem Part I: theory and numerical algorithm, *Wear*, vol. 152, pp. 351-367, 1992.
- Venner, C.H., ten Napel, W.E., Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem Part II: smooth surface results, *Wear*, vol. 152, pp. 369-381, 1992.
- Verstappen, R., A Simple Numerical Algorithm for Elastohydrodynamic Lubrication, Based on a Dynamic Variation Principle, *J. of Comp. Physics.*, vol. 97, pp. 460-488, 1991.

- Villa, C.V.S, Sinou, J., Thouverez, F., Investigation of a Rotor- Bearing System with Bearing Clearances and Hertz Contact by Using a Harmonic Balance Method, *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, vol. 29, no. 1, pp. 14-20, 2007.
- Wang, J., Qu, S., Yang, P., Simplified multigrid technique for the numerical solution to the steady-state and transient EHL line contacts and the arbitrary entrainment EHL point contacts, *Tribology International*, v. 34, pp. 191-202, 2001.
- Wensing, Jeroen Anton, *On the dynamics of ball bearings*, Enschede, the Netherlands: University of Twente, 1998, 173 p. Tese (Doutorado).
- Wijnant, Y.H., Wensing, J.A., vanNijen, G.C., The Influence of Lubrication on the Dynamic Behaviour of Ball Bearings, *J. Sound and Vibration*, vol. 222, (4), pp. 579-596, 1999.
- Wijnant, Ysbrand Hans, *Contact Dynamics in the field of Elastohydrodynamic Lubrication*, Enschede, the Netherlands: University of Twente, 1998, 179 p. Tese (Doutorado).
- Zargari, E.A., Jimack, P.K., Walkley, M.A., An Investigation of the film thickness calculation for elastohydrodynamic lubrication problems, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, (00), pp. 1-6, 2007.
- Zhao, S.X., Dai, X.D., Meng, G., Zhu, J., An experimental Study of nonlinear oil-film forces of a journal bearing, *J. of Sound and Vibration*, vol. 287, pp. 827-843, 2005.
- Zhou, H., Zhao, S.X., Xu, H., Zhu, J., An experimental study on oil-film dynamic coefficients, *Tribology Int.*, vol. 37, pp. 245-253, 2004.



## **Apêndice A**

### ***Distribuição de Carregamento em Mancais Radiais de Esfera***

Nesta seção, será apresentado de forma sucinta o equacionamento para obtenção da distribuição de carregamento em mancais de elementos rolantes de esferas radiais. O desenvolvimento completo deste equacionamento se encontra em Harris (1973), e é aqui utilizado seguindo a implementação computacional de Vischi (2008).

Conforme esperado, a distribuição de carregamento em um mancal é fortemente dependente do número de esferas, sua posição angular e, principalmente, da folga radial, pois esta define o comprimento angular da zona carregada.

De acordo com a teoria de Hertz, o carregamento da zona de contato está relacionado a uma deformação dos corpos, de modo a obter uma área de contato suficiente para absorver as pressões do contato, dentro da zona elástica do material. Como mostrado, a relação entre a aproximação dos corpos em contato seco e a força aplicada ao contato é da forma  $f = Kc^{3/2}$ .

Para cada elemento rolante, então, serão associadas duas deformações, uma para o anel interno,  $c_i$ , e uma para o anel externo,  $c_o$ . A soma destas duas deformações resulta na deformação total do elemento, ou seja, no valor total de aproximação entre as pistas do mancal. Desta forma:

$$c_n = c_i + c_o \quad (A.1)$$

Como apresentado em Harris (1973), o valor da rigidez em contato para a aproximação  $c_n$  pode ser obtido utilizando:

$$\bar{K}_n = \left[ \frac{1}{\left( \frac{1}{\bar{K}_i} \right)^{2/3} + \left( \frac{1}{\bar{K}_o} \right)^{2/3}} \right]^{3/2} \quad (\text{A.2})$$

Sendo que, para cada elemento,  $\bar{K}_i$  e  $\bar{K}_o$  podem ser aproximados pela expressão:

$$\bar{K}_{i,o} = 2,15 \times 10^5 \frac{1}{R_{i,o}} (c^*)^{-3/2} \quad (\text{A.3})$$

$$c^* = \frac{2f}{p} \left( \frac{p}{2k^2 E} \right)^{1/3} \quad (\text{A.4})$$

Onde  $c^*$  é um coeficiente adimensional de aproximação dos corpos .Então, para o mancal rígido com um carregamento puramente radial, a deflexão é dada por:

$$c_y = c_r \cos y - \frac{1}{2} P_d \quad (\text{A.5})$$

Neste caso,  $c_r$  é o deslocamento radial dos anéis,  $P_d$  é a folga diametral e  $y$  é o ângulo de Azimuth ou de posição do elemento. De acordo com Harris (1973), a expressão A.5 pode ser reescrita em função da deflexão máxima, na forma:

$$c_y = c_{\max} \left[ 1 - \frac{1}{2g} (1 - \cos y) \right] \quad (\text{A.6})$$

Onde:

$$g = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{P_d}{2c_r} \right) \quad (\text{A.7})$$

A expressão A.6 pode ser reescrita para o carregamento máximo. De forma similar, tem-se a carga máxima nos elementos,  $f_{\max}$ , e a carga por elemento,  $f_y$ , para cada ângulo  $y$ .

$$f_y = f_{\max} \left[ 1 - \frac{1}{2g} (1 - \cos y) \right]^{3/2} \quad (\text{A.8})$$

A Figura A.1 representa, esquematicamente, a condição de deflexão em um mancal radial antes e depois da aplicação do carregamento.

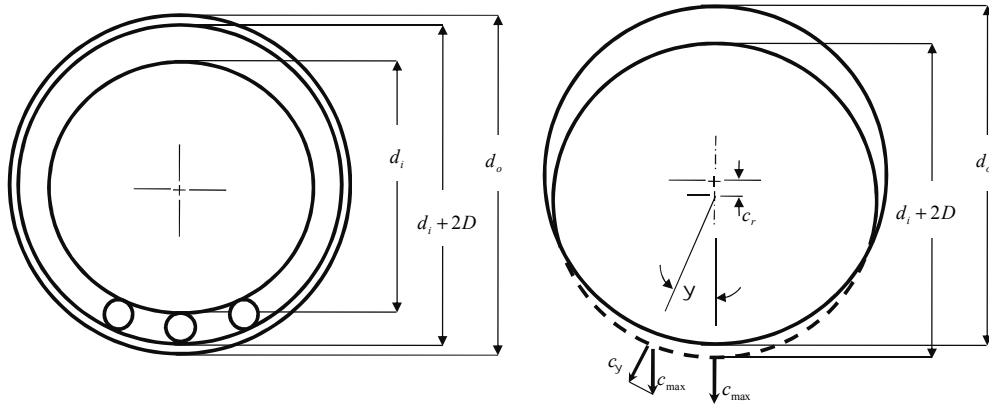


Figura A.1 – Condição de deformação em um mancal radial de esferas;

A extensão da zona solicitada pelo carregamento é definida pela folga diametral no mancal. Quando em folga zero, somente os elementos da metade inferior do mancal estarão carregados, ou seja, uma extensão de  $180^\circ$  do carregamento ao longo da pista. A expressão para o ângulo de carregamento é obtido a partir da equação A.5.

$$y_l = \cos^{-1} \left( \frac{P_d}{2c_r} \right) \quad (\text{A.9})$$

Tendo em mãos uma equação para o carregamento de cada elemento, a equação A.8, pode-se fazer o equilíbrio estático no mancal. Os elementos contidos na zona  $2y_l$  de carregamento devem estar solicitados por um carregamento que equilibre a força aplicada ao mancal. Tem-se, portanto, para a força resultante no mancal, a expressão:

$$f_r = f_{\max} \sum_{-y_l}^{+y_l} \left[ 1 - \frac{1}{2g} (1 - \cos y) \right]^{3/2} \cos y \quad (\text{A.10})$$

Que na forma integral, torna-se:

$$f_r = Z\bar{K}_n \left( c_r - \frac{P_d}{2} \right)^{3/2} J_r(g) \quad (\text{A.11})$$

Sendo:

$$J_r(g) = \int_{-y_l}^{+y_l} \left[ 1 - \frac{1}{2g} (1 - \cos y) \right]^{3/2} \cos y dy \quad (\text{A.12})$$

Nota-se que o equacionamento torna-se dependente do valor de  $g$ , sendo este o parâmetro de entrada para um equacionamento iterativo. O fator  $g$  é, por sua vez, dependente de  $c_r$ , que deve ser obtido pelo equacionamento. Este procedimento deve ser seguido até um desvio suficientemente pequeno entre os passos. Com a convergência do valor de  $c_r$  pode-se, então, obter o carregamento distribuído entre os elementos rolantes pela equação A.8.